COMENTARIOS AL PROGRAMA DE ANÁLISIS MATEMÁTICO III

El proyecto docente que presentamos se ha realizado para concursar a una plaza de Profesor Titular de Universidad en el Área de Matemática Aplicada para ejercer docencia de Análisis Matemático III en el Colegio Universitario de La Rioja.

Actualmente, el Colegio Universitario de La Rioja es un Centro Integrado en la Universidad de Zaragoza y en él se imparte, entre otras enseñanzas, el primer ciclo de la Licenciatura de Matemáticas.

A continuación voy a exponer un breve resumen del programa de la asignatura Análisis Matemático III.

1. VARIABLE COMPLEJA

El presente programa comienza con un tema sobre Análisis Complejo. Según cual fuera el desarrollo que se quiera dar al curso este tema podría omitirse pues no entra directamente dentro del núcleo del temario, constituido por las Ecuaciones Diferenciales. Sin embargo, nos parece importante impartir en este tercer curso de la Licenciatura una introducción a la teoría de variable compleja por varios motivos: El primero es que justo después del estudio del Análisis Real en varias variables (en segundo curso) es cuando el alumno advierte con más claridad la diferencia fundamental entre los resultados de la variable real y compleja. El segundo es que diversos resultados de variable compleja resultan enormemente útiles a la hora de abordar demostraciones de Ecuaciones Diferenciales, como puede ser el estudio de las soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales y la transformada de Laplace.

La teoría elemental de funciones de una variable compleja se centra en las funciones holomorfas (con derivada) o analíticas (desarrollables en serie). Ambos conceptos son equivalentes, y puede partirse indistintamente de uno u otro. Su equivalencia aparece a través de la integral compleja, y es la armonía entre estos tres poderosos instrumentos: derivación, integración y desarrollo en serie, la que proporciona su mayor belleza a la teoría. Esta puede seguirse sin apenas conocimiento del cálculo con funciones de varias variables reales, valiéndose de métodos puramente complejos cuya elegancia es innegable. Sin embargo, somos partidarios de efectuar aquí un tratamiento que se apoye en los conceptos utilizados en el análisis de funciones de $\mathbb{R}^n$ que se estudia el curso anterior, como puede ser las 1-formas diferenciales y el teorema de Stokes.

2. MÉTODOS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN

En sentido amplio, una *ecuación diferencial* es una ecuación que contiene derivadas o derivadas parciales de una o varias variables dependientes respecto a una o varias variables inpendientes. Resolver la ecuación diferencial consiste en encontrar una función suficientemente derivable que la satisfaga.

Según estemos tratando con funciones de una o varias variables diremos que nos encontramos ante la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias o la de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Aquí sólo nos ocuparemos de la primera de ellas. En concreto, este capítulo 2 está dedicado al estudio de los métodos de integración clásicos para los tipos elementales de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Uno de los objetivos fundamentales de este capítulo consiste en hacer comprender a los alumnos que las ecuaciones diferenciales no son algo que los matemáticos se inventan por puro placer intelectual, sino que son de gran utilidad ya que permiten resolver multitud de problemas físicos o geométricos.

La mejor forma de alcanzar este primer objetivo consiste en plantear ejemplos sencillos en los que se ponga de manifiesto que encontrar la solución a un problema concreto se reduce a resolver una ecuación diferencial. No hay ninguna dificultad en hacer esto ya que los ejemplos son innumerables en cualquier campo de la Física y de la Geometría. Por citar unos cuantos entre los más fáciles podemos hablar de la ecuación del movimiento de una partícula sometida a una fuerza (segunda ley de Newton), la desintegración radiactiva, el paso de la corriente en un circuito eléctrico, etc.

3. TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD. PROLONGACIÓN DE SOLUCIONES

Este es uno de los temas centrales del programa ya que en él se establecerán los fundamentos de la teoría de Ecuaciones Diferenciales

Ordinarias. Su inclusión es obligada en cualquier curso de Ecuaciones Diferenciales y no podría omitirse bajo ningún motivo.

En este capítulo se pretende como objetivo principal el estudiar las soluciones de los *problemas de valores iniciales* (también denominados *problemas de Cauchy*). Es decir, se parte de una ecuación diferencial $x' = f(t, x)$ y se estudian sus soluciones imponiendo una condición inicial del tipo $x(t_0) = x_0$. Los principales resultados que se demostrarán serán los teoremas de Picard (existencia y unicidad local), Picard-Lindelöf (existencia y unicidad global) y Peano (existencia).

4. DEPENDENCIA DE CONDICIONES INICIALES Y PARÁMETROS

Dada una ecuación diferencial cualquiera, es muy posible que no sepamos, e incluso que realmente no se pueda, resolverla por cuadraturas. Si modificamos ligeramente la ecuación diferencial y la transformamos en otra que sí somos capaces de resolver, nos interesa saber si las soluciones de esta nueva ecuación diferencial se pueden tomar como una buena aproximación de las soluciones de la ecuación original.

Un ejemplo típico es el de la ecuación del péndulo en la que para ángulos pequeños se efectúa la aproximación del seno de un ángulo por el ángulo en sí. La ecuación del péndulo sólo se puede resolver por métodos numéricos, pero con esa aproximación se convierte en una ecuación lineal fácilmente resoluble. Resolviéndola, obtenemos una función que presumiblemente debe ser una aproximación de la solución verdadera. Pues bien, lo que nos preguntamos es la diferencia que existe entre el movimiento que describe esta función con el movimiento real del péndulo.

Otra dificultad que se puede añadir es que en un problema de Cauchy no seamos capaces de determinar exactamente el valor x_0 que queremos que tome la solución en el instante inicial t_0 (por inexactitudes de medida en un proceso físico, por ejemplo). De nuevo nos interesará conocer cómo se perturba la solución en función de la variación de las condiciones iniciales.

5. SISTEMAS Y ECUACIONES LINEALES. CASO GENERAL

La teoría de ecuaciones diferenciales lineales es básica en multitud de aplicaciones a la Física, la Economía, la Ingeniería, etc. Muchos problemas reales vienen a plantear ecuaciones que son lineales o que admiten una aproximación lineal que es suficiente para muchos propósitos.

En concreto, dada $A(t)$ una matriz $n \times n$ cuyas componentes son funciones, y análogamente un vector columna $b(t)$, se trata de encontrar todas las soluciones del sistema lineal de n ecuaciones

$$x'(t) = A(t) \cdot x(t) + b(t).$$

La herramienta principal en el estudio de las ecuaciones lineales, aparte de los teoremas generales del capítulo 3, es el Álgebra Lineal de matrices y las funciones matriciales (exponencial de una matriz, por ejemplo).

Si tomamos el sistema homogéneo asociado $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$, sus soluciones forman un subespacio vectorial de dimensión n del espacio de las funciones continuas valoradas en $\mathbb{R}^n$. Y las soluciones del sistema completo son un subespacio afín, es decir, una solución cualquiera de la ecuación lineal más la solución general de la homogénea.

Como consecuencia de la resolución de sistemas de grado n, se aborda la solución de ecuaciones lineales de orden n.

6. SISTEMAS Y ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

En este capítulo pretendemos encontrar las soluciones del sistema lineal de grado n pero cuando la matriz de coeficientes A es constante. Este problema se reduce a estudiar su correspondiente sistema lineal homogéneo y aplicar el método de variación de las constantes o ayudarnos de una solución particular del lineal.

Y la solución del sistema homogéneo asociado es sencilla siempre que conozcamos los valores propios de la matriz A.

7. SOLUCIONES ANALÍTICAS

De los capítulos 7 y 8 quizás se pudiera prescindir, y de hecho así se hace en parte de los textos sobre Ecuaciones Diferenciales. Pero nosotros nos inclinamos por explicarlos por varios motivos entre los que podemos citar el atractivo en sí de los temas, su aplicabilidad y relación con la Física y finalmente nuestro interés en los mismos. De todas formas, y aunque en el programa hemos mencionado el estudio de la ortogonalidad de numerosos sistemas, parece razonable no abordar la de todos ellos ya que los métodos que se utilizan son similares.

El propósito principal de este capítulo es, como el título indica, la resolución de ecuaciones diferenciales lineales por medio de desarrollos en serie. Aunque se necesita un estudio teórico que demuestre que el método funciona, el procedimiento práctico de resolución consiste en tomar una serie de potencias, derivar término a término, sustituir en la ecuación diferencial e igualar coeficientes del mismo grado. En realidad, se puede asegurar que si los coeficientes de la ecuación lineal son analíticos con un radio de convergenca R, las soluciones serán funciones analíticas con el mismo radio de convergencia, luego la derivación término a término está permitida.

Entre las ecuaciones que usualmente se resuelven de este modo podemos citar las de Tchebichef y Hermite.

8. INTEGRACIÓN POR DESARROLLOS EN SERIE DE LA ECUACIÓN $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$

En el capítulo anterior se estudia la ecuación $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$ cuando $P(t)$ y $Q(t)$ son analíticas, y se ve que entonces las soluciones de la ecuación son analíticas. Nos podemos preguntar qué es lo que ocurre si $P(t)$ y $Q(t)$ tienen polos o singularidades esenciales. Parecería razonable esperar, por ejemplo, que cuando $P(t)$ y $Q(t)$ tienen un polo en un punto, las soluciones de la ecuación diferencial también tengan un polo en ese punto. Sin embargo, existen ejemplos sencillos que prueban que esta suposición no es cierta en general.

Así, para abordar estos problemas se consideran únicamente *puntos singulares regulares*, que son los puntos en los que, a lo sumo, $P(t)$ tiene un polo de orden uno y $Q(t)$ de orden dos. Hay multitud de ecuaciones que responden a este modelo. Entre ellas podemos citar las ecuaciones de Legendre, las de Jacobi, las hipergeométricas, las de Bessel, las de Laguerre y las de Euler.

Para resolver la ecuación diferencial se emplea el método de Fröbenius que consiste en ensayar soluciones del tipo t^λ multiplicado por una función analítica, derivar formalmente, sustituir en la ecuación e igualar coeficientes del mismo grado. De todas formas, la parte básica de todo este proceso es la demostración, originalmente debida a Frobënius, de que el método que hemos indicado conduce realmente a series convergentes cuya derivación término a término tiene sentido.

9. PROBLEMAS DE CONTORNO

Dada una ecuación diferencial de orden dos, en los capítulos anteriores nos dedicábamos a encontrar sus soluciones imponiendo una condición inicial $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$. Pero también nos podemos plantear un estudio de sus soluciones si, en lugar de condiciones iniciales, exigimos que estas satisfagan condiciones en la frontera, es decir, del tipo $x(a) = x_0$, $x(b) = x_1$, siendo $[a, b]$ un intervalo en el que tiene que estar definida la solución.

Los problemas de contorno tienen gran interés tanto en Matemáticas como en Física, pero su estudio es mucho más complejo que el de los problemas de valores iniciales. Aquí abordaremos únicamente los casos más sencillos. En particular, trataremos únicamente el problema de Sturm-Liouville regular, no el singular.

10. ECUACIÓN DIFERENCIAL AUTÓNOMA

Ha habido dos tendencias principales en el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales. La primera y más antigua se caracteriza por la búsqueda de soluciones explícitas ya sea en forma cerrada —lo que raramente resulta posible—, o bien, en términos de series de potencias. En la segunda, se pierde toda esperanza de resolver ecuaciones en el sentido tradicional y, en lugar de ello, nos concentramos en la búsqueda de información cualitativa sobre el comportamiento general de las soluciones. La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales la inició Poincaré hacia 1880, en relación con sus trabajos sobre la Mecánica Celeste. Desde entonces, ha sido objeto de un interés creciente, tanto en sus aspectos teóricos como aplicados.

En este capítulo y en el siguiente nos ocuparemos de estudiar diversos aspectos de la teoría cualitativa. En el primero de ellos se analizarán los sistemas autónomos, es decir de la forma $x' = f(x)$ con f independiente de t, haciendo especial hincapié en los sistemas autónomos en el plano ya que su interpretación geométrica es mucho más sencilla. En el segundo se verán diversos conceptos y resultados sobre teoría de estabilidad para sistemas no necesariamente autónomos ni lineales.

En particular, en este capítulo se analizan los diversos tipos de puntos críticos en el plano: nodo, punto de silla, foco y centro.

11. TEORÍA DE ESTABILIDAD

En este capítulo se incluye lo que se consideran conceptos y resultados fundamentales en relación con la teoría de estabilidad para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. En términos generales, se puede decir que una solución es estable cuando a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales se obtienen pequeñas variaciones de las soluciones para todo valor de la variable t.

Frecuentemente, en aplicaciones, no es suficiente el concepto de estabilidad. Se puede requerir que, a un pequeño cambio de las condiciones iniciales, la perturbación originada en la solución desaparezca con el tiempo. Esto nos conduce al concepto de estabilidad asintótica.

Además de estos dos conceptos también aparecen la estabilidad uniforme y la estabilidad asintótica uniforme. Para el caso de sistemas autónomos, estos dos conceptos no se distinguen de los anteriores.

En el capítulo se estudia en primer lugar la estabilidad de las ecuaciones lineales. Las propiedades de estabilidad de una ecuación lineal son globales, es decir, todas las soluciones tienen el mismo tipo de estabilidad. En el caso de sistemas con coeficientes constantes, las propiedades de estabilidad se reducen a comprobar si las partes reales de los valores propios de la matriz del sistema son positivas o negativas.

Las ecuaciones no lineales se analizan mediante el método de la primera aproximación que básicamente consiste en linealizar las ecuaciones no lineales aproximándolas por el primer término de su desarrollo de Taylor.

El otro tipo de argumentos que se emplean para estudiar la estabilidad de ecuaciones no lineales es lo que constituye el segundo método de Liapunov, llamado también *método directo* pues se aplica directamente a la ecuación no lineal sin pasar por la ecuación variacional. Este método, basado en su origen en el principio mecánico de que las posiciones de equilibrio estable de un sistema deben corresponder a estados de energía mínima, no sólo da criterios de estabilidad e inestabilidad de soluciones, sino que además puede llegar a proporcionar una forma de estimar la región de estabilidad asintótica. Esto es algo que no cabe esperar de la primera aproximación pues, aunque las propiedades de estabilidad de la ecuación lineal son globales, la adición de un término no lineal puede cambiar la región de estabilidad asintótica.

Sin embargo, tal generalidad tiene sus inconvenientes, el principal de los cuales es que exige la construcción de determinadas funciones auxiliares asociadas a la ecuación diferencial, para lo cual no hay un procedimiento general.

12. TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace es una transformada integral de gran interés de por sí y por sus estrechas relaciones con diversos campos de la Matemática; pero además, y en lo que a nosotros concierne, su uso proporciona un método eficiente para resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales e integrales. El estudio riguroso de sus propiedades, en particular de la fórmula de inversión, requiere un conocimiento suficiente de Análisis Complejo que permita abordar las demostraciones.

En particular, se verá cómo utilizar la transformada de Laplace para resolver diversos tipos de ecuaciones lineales y de ecuaciones integrales con núcleo de convolución.

13. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE VARIACIONES

Durante más de dos siglos, el Cálculo de Variaciones ha sido una de las principales ramas del Análisis. Es un instrumento de gran utilidad que se puede aplicar a muy diversos problemas tanto de Matemáticas como de Física.

Es fácil captar el interés del tema si se toman en cuenta algunos de sus problemas típicos. Supongamos que en un plano tenemos dos puntos fijos P_0 y P_1. Hay un número infinito de curvas que unen esos puntos y podemos preguntarnos cuál de ellas es la más corta. Por supuesto, la respuesta intuitiva —la línea recta— es la correcta. También podemos preguntarnos qué curva generará la superficie de revolución de área menor al girar en torno al eje de abscisas y, en este caso, la respuesta está lejos de ser evidente. Así mismo, si consideramos una curva típica como un alambre sin fricción en un plano vertical, entonces otro problema será encontrar cual es la forma de la curva que hace que el descenso de una partícula de P_0 a P_1 bajo la acción de la gravedad sea más rápido (problema de la *braquistocrona* de J. Bernouilli).

En última instancia, todos estos problemas se expresan como un problema de máximos y mínimos sobre un funcional definido en forma de integral. Esto es en cierto sentido similar al cálculo de máximos y mínimos de funciones de una o varias variables numéricas que se estudia en Análisis II, pero sustituyendo $\mathbb{R}^n$ por un espacio de Banach. Un estudio completo de la teoría requiere amplios conocimientos de Análisis que escapan de los objetivos del presente curso. Sin embargo, los métodos prácticos para hallar las soluciones a este tipo de problemas conducen siempre a una ecuación diferencial cuya resolución es la clave del problema. Es por esto que parece adecuado abordar este tema en un curso dedicado esencialmente a las Ecuaciones Diferenciales.