Notas sobre Polinomios

§1. Calentamiento

Un *polinomio* es una suma de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

donde x es la variable y $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son coeficientes constantes. Si $a_n \neq 0$, el número n se llama *grado*, y lo denotamos por $\deg(P)$. Si $a_n = 1$, el polinomio se dice *mónico*. Un número r que cumpla $P(r) = 0$ se dice *cero* de P o *raíz* de la ecuación $P(x) = 0$. Por el Teorema de Gauss–d'Alembert, también llamado *Teorema fundamental del álgebra*, todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene al menos un cero complejo. Por tanto, el número de ceros de un polinomio es igual a su grado (contando multiplicidades). Para un número α, $P(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0$ es el *valor* del polinomio en α.

Comenzamos con un ejemplo que a priori no parece que tenga que ver con los polinomios.

Ejemplo. Probar que se cumple la igualdad

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

Solución. Llamemos x a la parte de la izquierda de la igualdad que queremos probar. Elevando al cubo y haciendo simplificaciones es sencillo obtener que x cumple la ecuación

$$x^3 - 6x - 40 = 0.$$

Una solución es $x = 4$ (como era de esperar) y las otras dos son complejas. Como obviamente x es un número real (positivo), sólo puede ser $x = 4$, como queríamos demostrar. ■

1.1. Hallar todos los polinomios que satisfacen la ecuación funcional

$$(x + 1)P(x) = (x - 10)P(x + 1). \tag{1}$$

Solución. Evaluando (1) en $x = 10$ obtenemos que $P(10) = 0$, mientras que evaluando (1) en $x = -1$ obtenemos que $P(0) = 0$. Por tanto, $P(x) = x(x - 10)Q(x)$, para cierto polinomio Q. Sustituyendo en (1) y simplificando tenemos

$$xQ(x) = (x - 9)Q(x + 1). \tag{2}$$

Evaluando (2) en $x = 9$ obtenemos que $Q(9) = 0$, mientras que evaluando (2) en $x = 0$ obtenemos que $Q(1) = 0$. Por tanto, $Q(x) = (x - 1)(x - 9)R(x)$, para cierto polinomio R. Sustituyendo en (2) y simplificando tenemos

$$(x - 1)R(x) = (x - 8)R(x + 1). \tag{3}$$

Repitiendo este proceso llegamos a que para cierto polinomio U se cumple la ecuación

$$(x - 4)U(x) = (x - 5)U(x + 1). \tag{4}$$

Luego $U(5) = 0$ y por tanto $U(x) = (x-5)V(x)$. Sustituyendo en (4) y simplificando tenemos

$$V(x) = V(x+1),$$

de donde se deduce inmediatamente que V es constante, digamos $V = \lambda \in \mathbb{C}$. Entonces juntando toda la información obtenida tenemos

$$P(x) = \lambda x(x-1)\cdots(x-10),$$

donde λ es un número complejo cualquiera. ■

1.2. Sea P un polinomio de grado impar con coeficientes reales. Probar que la ecuación

$$P(P(x)) = 0$$

tiene al menos tantas raíces reales como la ecuación $P(x) = 0$, contadas sin multiplicidad.

Solución. Como P es un polinomio de grado impar, su rango (o imagen) son todos los números reales. Es decir, para cada $y_0 \in \mathbb{R}$ existe al menos un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P(x_0) = y_0$. Denotemos por $\{r_1, \ldots, r_m\}$ las m raíces distintas de $P(x) = 0$, para cierto $m \in \mathbb{N}$ (recordemos que como P es de grado impar, la ecuación $P(x) = 0$ tiene al menos una raíz real). Sean $\{s_1, \ldots, s_m\}$ números reales tales que $P(s_j) = r_j$ para $j = 1, \ldots, m$. Por supuesto, todos los s_j's son distintos. Por tanto,

$$P(x) = 0 \ \text{ tiene exactamente } m \text{ raíces distintas: } r_1, \ldots, r_m,$$

mientras que

$$P(P(x)) = 0 \ \text{ tiene al menos } m \text{ raíces distintas: } s_1, \ldots, s_m,$$

así que se cumple el enunciado. ■

1.3. Hallar todos los polinomios P con coeficientes reales para los cuales existe un entero positivo n tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$P\left(x + \frac{1}{n}\right) + P\left(x - \frac{1}{n}\right) = 2P(x). \tag{5}$$

Solución. Es inmediato comprobar que todos los polinomios lineales $P(x) = ax + b$ cumplen (5) para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Veamos que de hecho no hay más polinomios que satisfagan (5). En efecto, supongamos que P es una solución para cierto $n \in \mathbb{N}$. Denotemos por ℓ la recta que pasa por los puntos $(0, P(0))$ y $(1/n, P(1/n))$. Entonces usando (5) deducimos que todos los puntos de la forma $(m/n, P(m/n))$, con $m \in \mathbb{Z}$, pertenecen a la recta ℓ. Luego como P y ℓ coinciden en infinitos puntos tiene que ser necesariamente $P \equiv \ell$. ■

1.4. Hallar un polinomio de coeficientes enteros que tenga como cero $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Solución. Pongamos $a := \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. Entonces $\sqrt[3]{3} = a - \sqrt{2}$. Elevando al cubo y agrupando términos obtenemos

$$a^3 + 6a - 3 = (3a^2 + 2)\sqrt{2}.$$

Elevando ambos miembros de la igualdad anterior al cuadrado y simplificando tenemos que se cumple la ecuación polinómica

$$a^6 - 6a^4 - 6a^3 + 12a^2 - 36a + 1 = 0.$$

Luego $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ es un cero del polinomio $P(x) := x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$. ■

1.5. Sean $P(x) = x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ y $Q(x) = x^2+px+q$ dos polinomios de coeficientes reales. Supongamos que existe un intervalo (r, s) de longitud mayor que 2 tal que tanto $P(x)$ como $Q(x)$ son negativos para todo $x \in (r, s)$, y ambos son positivos para $x < r$ ó $x > s$. Probar que existe un número real x_0 tal que $P(x_0) < Q(x_0)$.

Solución. Por las propiedades de positividad (y continuidad) de P y Q es inmediato que ambos polinomios se anulan en r y s. Por tanto,

$$Q(x) = (x - r)(x - s), \qquad P(x) = (x - r)(x - s)R(x) = Q(x)R(x),$$

para cierto polinomio R de grado 2. Por las propiedades de positividad de P, deducimos que $R \geq 0$ en todo $\mathbb{R}$. Supongamos que el enunciado es falso; es decir, que $P \geq Q$ en todo $\mathbb{R}$. Entonces

$$R(x) \begin{cases} \geq 1 & \text{si } x \in (r, s), \\ \leq 1 & \text{si } x \in (-\infty, r) \cup (s, +\infty). \end{cases}$$

Luego tiene que ser $R(r) = R(s) = 1$; es decir,

$$R(x) = (x - r)(x - s) + 1.$$

Sin embargo, usando que $s-r > 2$, si evaluamos en $t = (r+s)/2$ obtenemos que $R(t) < 0$, llegando así a una contradicción. ■

1.6. Sea P un polinomio de grado n. Sabiendo que

$$P(k) = \frac{k}{k+1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

hallar $P(m)$ para los enteros $m > n$.

Solución. Como $P(0) = 0$, tenemos $P(x) = xQ(x)$ para cierto polinomio Q de grado $n - 1$. Además sabemos

$$Q(k) = \frac{1}{k+1}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Ponemos $H(x) := (x + 1)Q(x) - 1$. Por (6) sabemos que H se anula en $x = 1, \ldots, n$, y además H tiene grado n, luego

$$H(x) = A(x - 1) \cdots (x - n).$$

Usando que $H(-1) = -1$ deducimos que $A = (-1)^{n+1}/((n + 1)!)$. Volviendo hacia atrás, obtenemos

$$H(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(x - 1) \cdots (x - n), \qquad Q(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{(-1)^{n+1}(x - 1) \cdots (x - n)}{(n + 1)!(x + 1)},$$

y finalmente

$$P(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{(-1)^{n+1}x(x - 1) \cdots (x - n)}{(n + 1)!(x + 1)}.$$

En particular, para cada entero m tenemos

$$P(m) = \frac{m}{m+1} + \frac{(-1)^{n+1}m(m - 1) \cdots (m - n)}{(n + 1)!(m + 1)}.$$ ■

§2. Relaciones de Vieta

A partir del Teorema fundamental del álgebra (Gauss-d'Alembert) se deduce que el polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

se puede factorizar sobre los números complejos como

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Igualando los coeficientes de $x, x^2, \ldots x^n$ en ambas expresiones obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\vdots \\ x_1x_2\cdots x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Estas relaciones llevan el nombre del matemático francés F. Viète. Combinan dos formas de ver un polinomio: como una suma de monomios y como un producto de factores lineales.

Ejemplo. Si $x + y + z = 0$, probar

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \cdot \frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^7 + y^7 + z^7}{7}.$$

Solución. Consideremos el polinomio $P(t) = t^3 + pt + q$ cuyos ceros son x, y, z. Notar que sin pérdida de generalidad hemos elegido un polinomio P mónico y además sabemos que el coeficiente de t^2 es nulo (ya que la suma de las raíces es 0 por el enunciado). Luego

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = -2p.$$

Sumando las igualdades

$$x^3 = -px - q, \qquad y^3 = -py - q, \qquad z^3 = -pz - q,$$

que son ciertas por ser x, y, z ceros de P, obtenemos

$$x^3 + y^3 + z^3 = -3q.$$

Análogamente,

$$x^4 + y^4 + z^4 = -p(x^2 + y^2 + z^2) - q(x + y + z) = 2p^2,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 + z^5 &= -p(x^3 + y^3 + z^3) - q(x^2 + y^2 + z^2) &= 5pq \\ x^7 + y^7 + z^7 &= -p(x^5 + y^5 + z^5) - q(x^4 + y^4 + z^4) &= -7p^2q. \end{aligned}$$

Y ahora el enunciado se reduce a la obvia igualdad

$$\frac{-2p}{2} \cdot \frac{5pq}{5} = \frac{-7p^2q}{7}. \qquad \blacksquare$$

2.1. Hallar el mayor número real k con la propiedad que para todo polinomio $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ de grado 4, cuyos ceros son todos reales y positivos, se cumple

$$(b - a - c)^2 \geq kd,$$

y determinar cuándo se alcanza la igualdad.

2.2. Sean a, b y c números reales. Probar que los tres son no negativos si y sólo si

$$a + b + c \geq 0, \quad ab + bc + ca \geq 0 \quad \text{y} \quad abc \geq 0. \tag{7}$$

2.3. Para 5 enteros a, b, c, d, e sabemos que las sumas

$$a + b + c + d + e \quad \text{y} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$

son divisibles por un número impar n. Probar que la expresión

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 - 5abcde$$

también es divisible por n.

2.4. Hallar todos los polinomios con coeficientes iguales a 1 o -1 cuyos ceros son todos reales.

§3. Inducción

La inducción es muy útil en muchos tipos de problemas de olimpiadas, no sólo en problemas puramente de Teoría de Números. En esta sección veremos algunos ejemplos de su uso para resolver problemas donde aparecen polinomios.

Ejemplo. Sea P un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales tal que $|P(x)| \leq 1$ para todo $0 \leq x \leq 1$. Probar que

$$\left| P\left(-\frac{1}{n}\right) \right| \leq 2^{n+1} - 1.$$

Solución. Para trabajar con una notación más cómoda ponemos

$$f(x) := P\left(\frac{x}{n}\right).$$

Notar que f también es un polinomio de grado n. Ahora podemos reescribir el enunciado de la siguiente forma: *si* $|f(x)| \leq 1$ *para todo* $x \in [0, n]$, *probar que*

$$|f(-1)| \leq 2^{n+1} - 1.$$

Probaremos este enunciado por inducción. Para $n = 1$ el resultado es inmediato. Supongamos ahora que el enunciado es cierto para un entero positivo n y veamos que se cumple para $n + 1$. Sea entonces f un polinomio de grado $n + 1$ tal que $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in [0, n + 1]$. Queremos probar que $|f(-1)| \leq 2^{n+2} - 1$. Ponemos

$$g(x) := f(x) - f(x + 1).$$

Es sencillo comprobar que g tiene grado n y que $g/2$ cumple nuestro enunciado reformulado. Luego

$$\left|\frac{g(-1)}{2}\right| \leq 2^{n+1} - 1,$$

y por tanto

$$|f(-1)| = |f(0) + g(-1)| \leq 1 + (2^{n+2} - 2) = 2^{n+2} - 1,$$

como queríamos demostrar. ■

3.1. Para una función f denotamos

$$f^1(x) := f(x), \quad f^n(x) := f(f^{n-1}(x)) \quad n \geq 2.$$

¿Existe un polinomio cuadrático P tal que la ecuación $P^n(x) = 0$ tenga exactamente 2^n raíces reales para todo entero positivo n?

3.2. Probar que no existe ningún polinomio P de coeficientes reales y grado $n \geq 1$ tal que $P(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3.3. Sea P un polinomio de grado impar que satisface la identidad

$$P(x^2 - 1) = P(x)^2 - 1. \tag{8}$$

Probar que $P(x) = x$ para todo x real.