

DESIGUALDADES CLÁSICAS

PARA EL SEMINARIO DE PROBLEMAS (CURSO 2018/2019)
ALBERTO ARENAS

1. DESIGUALDADES ENTRE MEDIAS

La estrategia más general para probar desigualdades es transformar la desigualdad a la que nos enfrentamos en una cuya veracidad sepamos de antemano. Por ejemplo, sabemos que el área de un cuadrado es siempre no negativa; en realidad para cualquier número real x se tiene que $x^2 \geq 0$, cumpliéndose la igualdad si y solo si $x = 0$. Supongamos entonces que queremos probar la desigualdad

$$(1) \quad 2ab \leq a^2 + b^2$$

para a y b números reales. Si la reordenamos obtenemos la desigualdad equivalente

$$2ab \leq a^2 + b^2 \iff 0 \leq a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2,$$

que sabemos es cierta. Por supuesto la igualdad se cumple si y solo si $a - b = 0$, es decir, $a = b$.

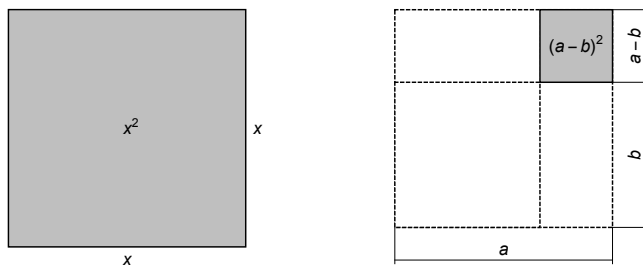


FIGURA 1. Representación geométrica de x^2 como el área de un cuadrado de lado x . A la derecha una representación geométrica de la bien conocida identidad notable $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

El problema reside en que a veces el número de pasos para transformar nuestra desigualdad en una del tipo $x^2 \geq 0$ es muy grande. Por eso es normal utilizar las desigualdades equivalentes que veremos a continuación.

Desigualdad GM-AM. Tomando $a = \sqrt{x}$ y $b = \sqrt{y}$, con x e y no negativos, en la desigualdad (1) obtenemos

$$2\sqrt{xy} \leq x + y \iff \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2},$$

dándose la igualdad si y solo si $x = y$. La parte de la izquierda es la *media geométrica* de los números x e y , mientras que la parte de la derecha es la *media aritmética* de x e y . Por eso, a la anterior desigualdad se la conoce como desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética, o simplemente desigualdad GM-AM —por sus siglas en inglés: «geometric mean» y «arithmetic mean»—. En realidad la **desigualdad GM-AM** es cierta para cualesquiera números $x_1, \dots, x_n$ reales no negativos y viene dada por

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

cumpléndose la igualdad si y solo si $x_1 = \cdots = x_n$.

Ejemplo 1.1. *De todos los ortoedros de área A fija, el cubo es el de mayor volumen.*

Desigualdad HM-GM. A partir de la desigualdad GM-AM podemos obtener otra desigualdad bien conocida. Supongamos que x e y son dos números reales positivos, entonces

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2} \iff \frac{2}{x + y} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}} \iff \frac{2xy}{x + y} \leq \sqrt{xy} \iff \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy},$$

cumpléndose la igualdad si y solo si $x = y$. La parte de la izquierda es la *media armónica* de los números x e y , razón por la cual a la desigualdad anterior se la conoce como desigualdad entre la media armónica y la media geométrica, o simplemente desigualdad HM-GM —en inglés la media armónica es «harmonic mean»—. En este caso también se tiene que la **desigualdad HM-GM** es cierta para cualesquiera números $x_1, \dots, x_n$ positivos y viene dada por

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},$$

cumpléndose la igualdad si y solo si $x_1 = \cdots = x_n$.

Ejemplo 1.2. *Sean a , b y c números reales positivos tales que $a + b + c = 2$. Probar*

$$\frac{ab}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} + \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{ac}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} \leq 1.$$

Desigualdad AM-QM. La última de las desigualdades de este apartado la vamos a obtener tomando $a = x$ y $b = y$, con x e y reales no negativos, en la desigualdad (1). De este modo

$$2xy \leq x^2 + y^2 \iff (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \iff \frac{x + y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

cumpléndose la igualdad si y solo si $x = y$. La parte de la derecha es la *media cuadrática* de los números x e y , por lo que a esta desigualdad se la conoce como desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática, o simplemente desigualdad AM-QM —por el término «quadratic mean» en inglés para la media cuadrática—. La **desigualdad AM-QM** es cierta para cualesquiera números $x_1, \dots, x_n$ reales y viene dada por

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

cumpléndose la igualdad si y solo si $x_1 = \dots = x_n$. No es necesario para que se cumpla la desigualdad, pero es usual suponer que todos los números son positivos.

Ejemplo 1.3. Si a y b son dos números reales no negativos tales que $a + b \geq 1$, entonces $a^4 + b^4 \geq 1/8$.

Las tres desigualdades que acabamos de ver se denominan **desigualdades de medias**. Las cuatro medias que hemos visto para $x_1, \dots, x_n$ reales positivos se relacionan mediante la siguiente cadena de desigualdades

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

En la figura 2 puedes ver una representación geométrica de cada una de estas medias para dos números positivos x e y , y comprobar visualmente la anterior cadena de desigualdades. En general para r positivo se define **la media de orden r** por

$$M_r(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[r]{\frac{x_1^r + \dots + x_n^r}{n}}.$$

Se cumple la desigualdad

$$M_r(x_1, \dots, x_n) \leq M_s(x_1, \dots, x_n) \quad \text{si } r \leq s.$$

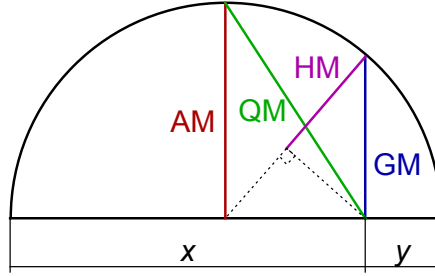


FIGURA 2. Las distintas medias para dos números positivos x e y : en magenta la media armónica, en azul la media geométrica, en rojo la media aritmética y en verde la media cuadrática.

Ejemplo 1.4. Sean dos velocidades v_1 y v_2 distintas, ¿cómo se viaja más rápido entre dos puntos, yendo la mitad de la distancia a velocidad v_1 y la otra mitad a v_2 , o yendo la mitad del tiempo a velocidad v_1 y la otra mitad a v_2 ?

2. LA DESIGUALDAD TRIANGULAR

Uno de los problemas geométricos más sencillos de resolver en el dibujo técnico es la construcción de un triángulo $\triangle ABC$ dados como datos sus tres lados a , b y c . La resolución consiste básicamente en fijar uno de los lados; por ejemplo el lado a , con vértices B y C , y hallar la localización del tercer vértice A como intersección de dos circunferencias: una con centro en B y radio c , y la otra con centro en C y radio b . Pero, ¿siempre se cortan las dos circunferencias?

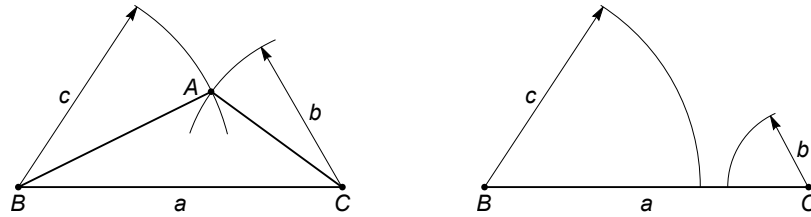


FIGURA 3. Construcción de un triángulo dados sus lados a , b y c . Si alguna de las desigualdades triangulares $a < b + c$, $b < a + c$ o $c < a + b$ no se cumple, entonces es imposible construir el triángulo.

Fijándonos en la figura 3, vemos que una vez dibujada la circunferencia de centro B y radio c , para que la otra circunferencia la corte debe cumplirse que $a - b \leq c$, es decir, $a \leq b + c$. En el caso $a = b + c$ el tercer vértice A está sobre el lado a y lo que se obtiene un triángulo degenerado en un segmento.

Este razonamiento se puede hacer exactamente del mismo modo si en lugar de fijar en primer lugar el lado a fijamos los lados b o c , obteniendo $b \leq a+c$ y $c \leq a+b$ respectivamente. Por tanto,

Si las longitudes de los lados de un triángulo son a , b y c , entonces

$$a \leq b + c, b \leq a + c \text{ y } c \leq a + b,$$

Ejemplo 2.1. Sean a , b y c los lados de un triángulo. Probar $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + ac + bc)$.

Pensemos ahora en dos números reales x e y cualesquiera. Como puedes ver en la figura 4, la desigualdad $|x| \leq y$ es equivalente a la cadena de desigualdades $-y \leq x \leq y$. Por otra parte, es claro que $-|x| \leq x \leq |x|$ y $-|y| \leq y \leq |y|$; sumando estas dos cadenas obtenemos

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

que, como acabamos de decir, es equivalente a la desigualdad

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si x e y tienen el mismo signo. Aplicando esta desigualdad sucesivamente, es fácil obtener la **desigualdad triangular** para n números reales cualesquiera

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|,$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $x_1, \dots, x_n$ son linealmente dependientes, es decir, $x_1 = \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ con $\lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$.



FIGURA 4. La desigualdad $|x| \leq y$ es equivalente a la cadena de desigualdades $-y \leq x \leq y$.

Desigualdad triangular inversa. Sean x e y dos números reales cualesquiera, entonces se cumple

$$||x| - |y|| \leq |x + y|.$$

Esta desigualdad triangular inversa es equivalente a la cadena de desigualdades

$$-|x + y| \leq |x| - |y| \leq |x + y|,$$

por lo que bastaría probar cada una de estas desigualdades. Pero esto se sigue fácilmente de la desigualdad triangular, ya que

$$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y| \iff |x| - |y| \leq |x + y|$$

y

$$|y| = |y + x - x| \leq |x + y| + |x| \iff -|x + y| \leq |x| - |y|.$$

Ejemplo 2.2. Probar la desigualdad

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$

donde x_1, x_2, y_1 e y_2 son números reales. ¿Cuándo se cumple la igualdad?

3. LA DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

Ocurre muchas veces en matemáticas que un resultado elemental tiene consecuencias difíciles de imaginar de antemano. Por ejemplo, sabemos que las soluciones de la ecuación cuadrática $at^2 + bt + c = 0$, con $a > 0$, vienen dadas por las reconocidas fórmulas

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dependiendo de si $b^2 - 4ac$ es positivo, nulo, o negativo, la ecuación tiene dos soluciones reales, una solución real doble, o ninguna, respectivamente. Para ver esto observa que si $b^2 - 4ac = 0$ entonces t_1 y t_2 coinciden, mientras que si $b^2 - 4ac < 0$ entonces tanto t_1 como t_2 son números complejos. Geométricamente, el polinomio $y = at^2 + bt + c$ se corresponde con una parábola en el plano (t, y) . En la figura 5 puedes ver representadas las tres situaciones que acabamos de comentar. Observa que el caso $b^2 - 4ac > 0$ es el único en el que la parábola tiene puntos por debajo del eje de abscisas; es decir:

Sea $a > 0$; la desigualdad $at^2 + bt + c \geq 0$ es cierta para todo t real si y solo si $b^2 - 4ac \leq 0$,

cumpléndose la igualdad en el punto $t = -b/(2a)$ si y solo si $b^2 - 4ac = 0$.

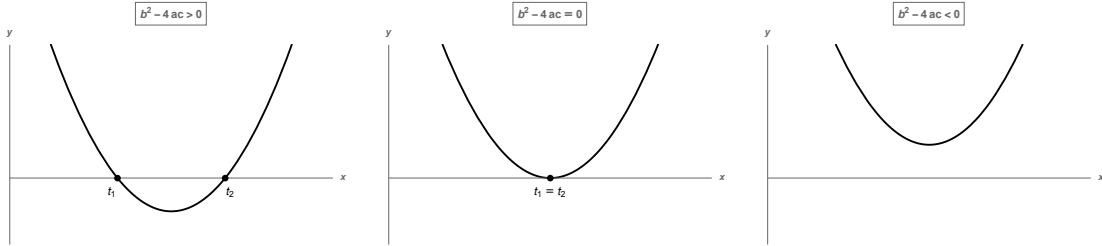


FIGURA 5. Representación geométrica de la raíces de un polinomio de segundo grado $at^2 + bt + c$, con a positivo. Cada una de las tres imágenes se corresponde con los distintos casos de existencia de dos, una o ninguna raíz.

Pensemos ahora en la siguiente suma de cuadrados

$$(x_1t + y_1)^2 + \cdots + (x_nt + y_n)^2,$$

donde t es un número real, $x_1, \dots, x_n$ números reales no todos nulos e $y_1, \dots, y_n$ números reales cualesquiera. Ya sabemos que la suma es no negativa, y si desarrollamos cada uno de los cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x_1 t + y_1)^2 + \dots + (x_n t + y_n)^2 \\ &= x_1^2 t^2 + y_1^2 + 2x_1 y_1 t + \dots + x_n^2 t^2 + y_n^2 + 2x_n y_n t \\ &= (x_1^2 + \dots + x_n^2) t^2 + 2(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) t + y_1^2 + \dots + y_n^2, \end{aligned}$$

es decir, una desigualdad del tipo $at^2 + bt + c \geq 0$ con

$$a = x_1^2 + \dots + x_n^2, \quad b = 2(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n), \quad \text{y} \quad c = y_1^2 + \dots + y_n^2.$$

Así que, como hemos visto, esta desigualdad implica que la desigualdad $b^2 - 4ac \leq 0$, que en nuestro caso es

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \leq 0,$$

también es cierta. La desigualdad que hemos obtenido suele reescribirse como

$$\boxed{(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)},$$

y se denomina **desigualdad de Cauchy-Schwarz**. La igualdad se cumple si y solo si $x_i = \lambda y_i$, con λ real, para todo $i = 1, \dots, n$.

Ejemplo 3.1. Sean $a_1, \dots, a_n$ números reales positivos tales que $a_1 + \dots + a_n = 1$, entonces

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n.$$

Ejemplo 3.2. Para a y b números reales positivos fijos, ¿cuál es el máximo valor de $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ para $0 < \alpha < \pi/2$? ¿Para qué valores de α se alcanza dicho máximo?

EXTRA: DESIGUALDAD DE CHEBYSHOV

Sean $a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_n$ números reales ordenados de mayor a menor, es decir,

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \quad \text{y} \quad b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n.$$

Entonces se cumple la cadena de desigualdades

$$\boxed{n(a_1 b_n + \dots + a_n b_1) \leq (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n) \leq n(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)},$$

denominada **desigualdad de Chebyshev**¹. La igualdad únicamente se da cuando o bien $a_1 = \dots = a_n$ o bien $b_1 = \dots = b_n$.

¹También se puede encontrar escrito de las siguientes formas: Chebyshev, Tchebychev, Tschebyscheff. Sin embargo, en estas desafortunadas transliteraciones del nombre original ruso «Чебышев», cuya transliteración científica es «Čebyšev», la letra «č» es confundida con la letra «e». La pronunciación de «č» se aproxima a /yo/, como en *yo*, mientras que «e» se pronuncia /ie/, como en *hielo*. Por su parte, las letras «Ч» y «Ш» se pronuncian aproximadamente /ch/ y /sh/, como en *chao* y /sh/, como en *English*.