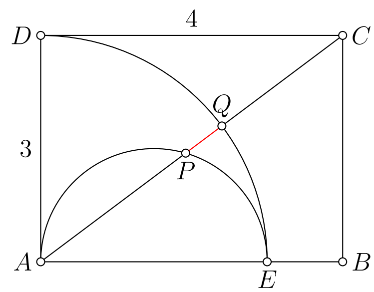
Seminario de problemas Curso 2024-25. Hoja 9

72. En la figura se muestra un rectángulo $ABCD$ cuyos lados miden $AB = 4$ y $BC = 3$. Se han trazado el cuarto de circunferencia AED y la semicircunferencia AE. Si P y Q son los puntos de intersección de estos arcos de circunferencia con la diagonal AC, ¿cuál es la longitud del segmento PQ?



Solución.

Está claro que AQ es igual a 3. Por otra parte, el triángulo APE es rectángulo y, por tanto, semejante al triángulo ABC. De aquí se deduce que

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow AP = \frac{12}{5},$$

ya que $AE = 3$, $AC = 5$ y $AB = 4$. Por consiguiente, la distancia entre P y Q es

$$AQ - AP = 3 - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}.$$

73. Sabiendo que $1 + 2 + 3 + \cdots + 101 = 5151$, ¿cuántos signos + tendríamos que cambiar en signo − para que el resultado fuera 2024?

Solución.

Observemos que cambiar un signo + a uno − en uno de los sumandos, pongamos k, equivale a restar dos veces ese sumando a la suma original. Es decir,

$$1 + 2 + 3 + \cdots - k + \cdots + 101 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k + \cdots + 101) - 2k = 5151 - 2k.$$

Así, cada vez que cambiamos un signo es como restar una cantidad par a 5151 y el número resultante será impar. Como 2024 es un número par, no podremos conseguir 2024 mediante cambios de signo.

74. Tres amigas, Ana, Bea y Carla, han recogido un montón de nueces, que han dejado en una canasta, para luego repartirlas entre ellas a partes iguales. Ana, impaciente, toma la tercera parte de las nueces y se va a su casa. Bea, no sabiendo que Ana ya se había llevado su parte, toma la tercera parte de las nueces que quedaban en la canasta y se marcha. Finalmente, llega Carla que, no sabiendo que sus amigas ya habían cogido nueces, se llava un tercio de las que quedaban. Si todavía hay 16 nueces en la canasta, ¿cuántas nueces se llevó Bea?

Solución.

Sea X el número de nueces que han recogido entre las tres amigas. Ana se llevó $X/3$, dejando $2X/3$ nueces. De las que dejó Ana, Bea se llevó la tercera parte, es decir, se llevó $2X/9$ y dejó $4X/9$. Finalmente, Carla se llevó $4X/27$, dejando $8X/27$. Por tanto,

$$\frac{8}{27}X = 16 \Rightarrow X = 54.$$

Así, Bea se llevó 12 nueces. También podemos saber las nueces que se llevaron Ana y Carla. En concreto, Ana se llevó 18 nueces y Carla 8.

El problema también se puede resolver teniendo en cuenta que, si sobraron 16 nueces, estas son 2/3 de las nueces que encontró Carla. Es decir, Carla encontró 24 nueces. A su vez, 24 son las nueces que dejó Bea, que son 2/3 de las que encontró. Es decir, Bea encontró 36 nueces, por lo que se llevó 12. Un razonamiento análogo nos lleva a ver que, al principio, había 54 nueces y Ana se llevó 18.

75. El producto de la edad de los hijos de Arturo es 1664. Su hijo menor tiene la mitad de años que su hijo mayor. ¿Cuántos hijos tiene Arturo?

Solución.

Si descomponemos 1664 en producto de factores primos, tenemos que $1664 = 13 \cdot 2^7$. Con esto deducimos que el mayor y el pequeño tienen que tener edades que son potencias de 2 (de otro modo, si uno de ellos tiene una edad múltiplo de 13, el otro también debería tenerla, pero 13 solo está una vez en la descomposición en factores primos). Además, el mayor tendrá que tener más de 13 años. Esto nos da una única solución. Arturo tiene tres hijos, el pequeño tiene $8 = 2^3$ años, el mediano 13 y el mayor $16 = 2^4$.

76. Completa el número $13xy45z$, sabiendo que es divisible por 792.

Solución.

Descompuesto en producto de factores primos, $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$. En particular, el número buscado es múltiplo de 8, por lo que sus tres últimas cifras tienen que ser múltiplo de 8. Por tanto, $z = 6$. Por otra parte, el número es múltiplo de 9, por lo que la suma de sus cifras ha de ser un múltiplo de 9. Es decir,

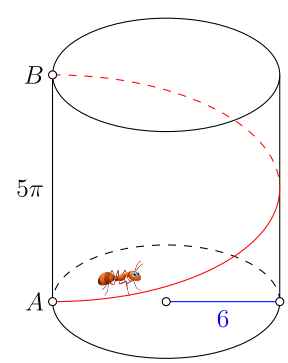
$$1 + 3 + x + y + 4 + 5 + 6 = \dot{9} \Rightarrow 1 + x + y = \dot{9}.$$

Pero, al ser múltiplo de 11, la resta de la suma de las cifras pares e impares es un múltiplo de 11. Esto es,

$$(1 + x + 4 + 6) - (3 + y + 5) = 3 + x - y = \dot{11}.$$

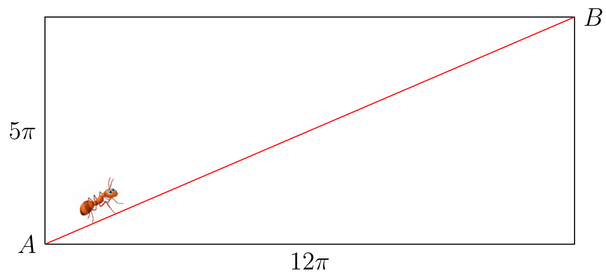
Puesto que $0 \leq x, y \leq 9$, la única solución posible para las dos ecuaciones en x, y es $x = 8$, $y = 0$. De este modo, el número buscado es 1380456.

77. Una hormiga se encuentra en el punto A de la base de un vaso cilíndrico de radio 6 y altura 5π y quiere subir hasta el punto B de la parte superior del vaso que se encuentra sobre la misma vertical que A rodeando una vez el vaso, como se indica en la figura (no está a escala). ¿Cuál es la longitud del camino mínimo que puede realizar la hormiga?



Solución.

Si cortamos verticalmente el cilindro por la línea AB y extendemos la superficie lateral del cilindro, obtenemos un rectángulo como el siguiente



La línea más corta entre A y B es la línea recta, por lo que el recorido mínimo es igual a la diagonal del rectángulo, es decir
$$D = \sqrt{(5\pi)^2 + (12\pi)^2} = 13\pi.$$

78. Calcula la suma de los cuadrados de los cien primeros términos de una prograsión aritmética, sabiendo que la suma de ellos vale -1 y que la suma de los términos de lugar par vale $+1$.

Solución.

Sea la progresión a, $a+d$, $a+2d$, $\ldots$, $a+99d$, entonces tenemos que hallar:

$S = a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2+\cdots+(a+99d)^2 = 100a^2+2a\cdot d(1+2+...+99)+d^2(1^2+2^2+....+99^2)$.

Ahora bien,
$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
por lo que
$$1+2+\cdots+99 = 99\cdot 50 = 4950, \quad 1^2+2^2+\cdots+99^2 = 328350$$
y, entonces, $S = 100a^2+9900a\cdot d+328350d^2$. Solo falta calcular a y d, lo que podemos hacer resolviendo el sistema:
$$a+(a+d)+\cdots+(a+99d) = (2a+99d)50 = -1,$$
$$(a+d)+(a+3d)+\cdots+(a+99d) = (2a+100d)25 = 1.$$
De aquí, se obtiene $a = -149/50$, $d = 3/50$ y, finalmente, $S = 14999/50$.

79. Sea p un número primo. Determina todos los enteros k tales que $\sqrt{k^2-kp}$ es también entero.

Solución.

Puesto que $\sqrt{k^2-kp}$ es un número entero, existe un número natural n tal que
$$k^2-kp = n^2 \Rightarrow k = \frac{p\pm\sqrt{p^2+4n^2}}{2}.$$
El mismo razonamiento nos lleva a deducir que existe un número natural m de manera que
$$p^2+4n^2 = m^2 \Rightarrow p^2 = m^2-4n^2 = (m-2n)(m+2n).$$
Como p es un número primo, hay dos posibles soluciones a la ecuación anterior:

- $m - 2n = p$, $m + 2n = p$, por lo que $m = p$.
- $m - 2n = 1$, $m + 2n = p^2$, por lo que $m = (p^2 + 1)/2$ y, entonces $p \neq 2$.

Teniendo en cuenta que $k = (p \pm m)/2$, resulta que, si $p = 2$, hay dos soluciones: $k = 0$, $k = p$. Por el contrario, si $p \neq 2$, hay cuatro soluciones

$$k = 0, \quad k = p, \quad k = \frac{(p+1)^2}{4}, \quad k = -\frac{(p-1)^2}{4}.$$