Seminario de problemas Curso 2023-24. Hoja 9

Problemas de la Fase 0 de la LX Olimpiada Matemática Española de la Comunidad de Madrid

81. La niña Centésima invirtió 500 euros en un negocio y, dos meses más tarde, don Retorcido, envidioso, se unió e invirtió 300 euros en el mismo negocio. Si, después de 10 meses asociados, ganaron en total 2700 euros, ¿cuánto dinero le corresponde a la niña Centésima?

A) 1400 € **B**) 1600 € **C**) 1800 € **D**) 1900 € **E**) 1950 €

Solución

Centésima ha invertido 500 euros durante 12 meses, es decir 6000 euros, mientras que don Retorcido, en los 10 meses asociados, ha invertido 3000 euros. Por tanto, a Centésima le corresponden las dos terceras partes del dinero, esto es 1800 euros. Así pues, la respuesta es C.

82. ¿Cuántas soluciones enteras, (x, y, z), tiene la ecuación $(x-3)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 100$?

A) 30 **B**) 24 **C**) 20 **D**) 18 **E**) 9

Solución

Solo podemos obtener 100, sumando tres cuadrados, de dos maneras:

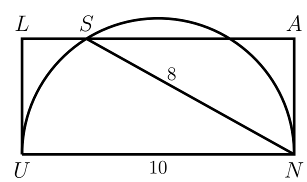
$$0^2 + 0^2 + 10^2 = 100, \quad 0^2 + 6^2 + 8^2 = 100.$$

En el primero de los casos, obtenemos 6 soluciones:

$$\begin{array}{lrlll}
(x-3)^2 = (y+4)^2 = 0, & z^2 = 100, & x = 3, & y = -4, & z = \pm 10, \\
(x-3)^2 = z^2 = 0, & (y+4)^2 = 100, & x = 3, & y = -14, 6, & z = 0, \\
(y+4)^2 = z^2 = 0, & (x-3)^2 = 100, & x = -7, 13, & y = -4, & z = 0.
\end{array}$$

mientras que, para el segundo caso, obtenemos 24. En total hay 30 soluciones y la respuesta es A.

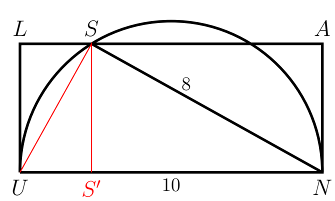
83. En el rectángulo $LUNA$ el lado mayor mide $UN = 10$. El semicírculo de diámetro UN corta al lado LA en un punto S, siendo $SN = 8$. ¿Qué área tiene el rectángulo $LUNA$?



A) 44 **B**) 45 **C**) 46 **D**) 48 **E**) 50

Solución

Trazamos los segmentos auxiliares US y SS', este último igual al lado UL. Como UN es el diámetro del semicírculo, entonces el triángulo USN es rectángulo.



Usando el Teorema de Pitágoras, se deduce que $US^2 = UN^2 - SN^2 = 100 - 64 = 36$, por lo que $US = 6$. Es fácil ver que el área del rectángulo es dos veces la del triángulo, que es igual a $US \cdot SN/2 = 24$, por lo que el área de $LUNA$ es 48.

También se puede proceder, viendo que los triángulos USS' y USN son semejantes y entonces

$$\frac{US}{UN} = \frac{SS'}{SN} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{SS'}{8} \Rightarrow SS' = \frac{48}{10}.$$

Por tanto, el área del rectángulo es igual a $AN \cdot SS' = 48$ y la respuesta es D.

84. Una competición consiste en resolver 100 ecuaciones. Para que el torneo sea justo, en los enfrentamientos individuales, los estudiantes de BACH dan una ventaja de 30 ecuaciones a los de 4ESO y los de 4ESO dan a los de 3ESO una ventaja de 20 ecuaciones. ¿Cuántas ecuaciones de ventaja debe dar un estudiante de BACH a uno de 3ESO?

A) 40 **B**) 44 **C**) 50 **D**) 56 **E**) 60

Solución

Sean B, E_4 y E_3, respectivamente, los tiempos invertidos por un estudiante de bachiller, de 4ESO y de 3ESO en resolver un porblema. Entonces, se cumple que

$$100B = 70E_4, \quad 100E_4 = 80E_3 \Rightarrow 100B = 56E_3,$$

por lo que los de bachiller deberán dar 44 ecuaciones de ventaja a los de 3ESO. Así, la respuesta es B.

85. ¿Cuál es el valor de $(50^2 + 48^2 + \cdots + 4^2 + 2^2) - (49^2 + 47^2 + \cdots + 3^2 + 1^2)$?

A) 625 **B**) 850 **C**) 1000 **D**) 1250 **E**) 1275

Solución

Reagrupamos los sumandos de la siguiente manera

$$(50^2 - 49^2) + (48^2 - 47^2) + \cdots + (2^2 - 1^2).$$

Cada uno de los paréntesis es una diferencia de cuadrados de la forma $(n+1)^2 - n^2$ y, entonces,

$$(n+1)^2 - n^2 = (n+1+n)(n+1-n) = 2n+1.$$

Así, se tiene

$$(50^2 - 49^2) + (48^2 - 47^2) + \cdots + (2^2 - 1^2) = 99 + 95 + 91 + \cdots + 3 = \frac{(99+3)\cdot 25}{2} = 1275.$$

Por tanto, la respuesta es E.

86. Don Retorcido tiene varias canicas, todas del mismo peso. La suma total de los pesos de todos los posibles grupos de cuatro canicas es quince veces la suma total de los pesos de todas las posibles parejas. ¿Cuántas canicas tiene don Retorcido?

A) 8 **B**) 10 **C**) 11 **D**) 12 **E**) 14

Solución

Sea n el número de canicas que tiene don Retorcido. Entonces, todos los posibles grupos de 4 canicas que puede formar son $\binom{n}{4}$ y los de dos canicas $\binom{n}{2}$. Según las condiciones que nos dan, si p es el peso de una canica,

$$4p\binom{n}{4} = 15 \cdot 2p\binom{n}{2} \Rightarrow 2\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 15\frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

De aquí se deduce que

$$(n-2)(n-3) = 90 \Rightarrow n = 12$$

y la respuesta es D.

87. Sol dice a Sergio: si me das un cuarto de tu dinero yo tendré los tres quintos de lo que te quede. Sergio responde a Sol: si tú me dieras un tercio de lo que tienes yo tendría 2240 euros más de lo que te quede. ¿Cuántos euros tienen entre los dos amigos?

A) 2880 **B**) 2900 **C**) 2920 **D**) 2960 **E**) 2300

Solución

Sea Se el dinero que tiene Sergio y So el que tiene Sol. Entonces, por lo que dice Sol, se debe cumplir

$$So + \frac{Se}{4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}Se \Rightarrow Se = 5So.$$

De lo que dice Sergio, deducimos que

$$Se + \frac{So}{3} = \frac{2}{3}So + 2240.$$

Combinando esta ecuación con la anterior, resulta $So = 480$, por lo que, entre los dos, tendrán 2880 euros y la respuesta es A.

88. Si a, b, c, d, son cifras diferentes no nulas que suman 23, ¿cuánto suman los números de cuatro cifras formados por esas cuatro cifras?

A) 127898 **B**) 138888 **C**) 153318 **D**) 338825 **E**) 638825

Solución

Fijémonos en una sola de las cifras, por ejemplo a. Habrá 3! números que tengan la cifra a en la posición de las unidades, 3! en la posición de las decenas, 3! en la posición de las centenas y 3! en la de los millares. Lo mismo podemos decir de las otras tres cifras. Como

$$abcd = 100 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d,$$

podemos ver que, al sumar todos los números posibles de 4 cifras formados con a, b, c y d, su suma será igual a

$$3! \cdot (a + b + c + d) \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = 6 \cdot 23 \cdot 1111 = 153318,$$

y la respuesta es C.

89. ¿Cuál es el valor de $\dfrac{2023^3 + 2023^2 - 2024}{2023^2 - 1}$?

A) $\dfrac{2024}{2023}$ **B**) $\dfrac{2023}{2024}$ **C**) $\dfrac{2023}{2022}$ **D**) 2023 **E**) 2024

Solución

Vamos a manipular el numerador de la expresión

$$2023^3 + 2023^2 - 2024 = 2023^2(2023 + 1) - 2024 = 2024(2023^2 - 1).$$

Por tanto,

$$\frac{2023^3 + 2023^2 - 2024}{2023^2 - 1} = \frac{2024(2023^2 - 1)}{2023^2 - 1} = 2024,$$

y la respuesta es E.

90. Voy a meter fichas blancas y negras en una caja, pero no lo haré al tuntún. En total tiene que haber más de 30 fichas y menos de 35. Además, las fichas negras serán más que la mitad de blancas y menos de 15. Con estas condiciones, ¿de cuántas maneras puedo meter las fichas en la caja?

A) 14 **B**) 15 **C**) 16 **D**) 17 **E**) 18

Solución

Observemos que el número de bolas negras tiene que ser superior a 10, pues en otro caso, el mínimo de bolas blancas necesarias para que haya al menos 31 bolas en total sería 21, pero $10 < 21/2$. Por tanto, puede haber 11, 12 ,13 o 14 bolas negras. Si vamos caso a caso, respetando las condiciones, tenemos los siguientes

- 11 bolas negras, 20 o 21 bolas blancas.
- 12 bolas negras, 19, 20, 21 o 22 bolas blancas.
- 13 bolas negras, 18, 19, 20 o 21 bolas blancas.
- 14 bolas negras, 17, 18, 19 o 20 bolas blancas.

En total se puede hacer de 14 formas distintas y la respuesta es A.

91. ¿Cuál es la cifra de las unidades del número $2023^{(2024^{2022})}$?

A) 3 **B**) 5 **C**) 7 **D**) 9 **E**) 1

Solución

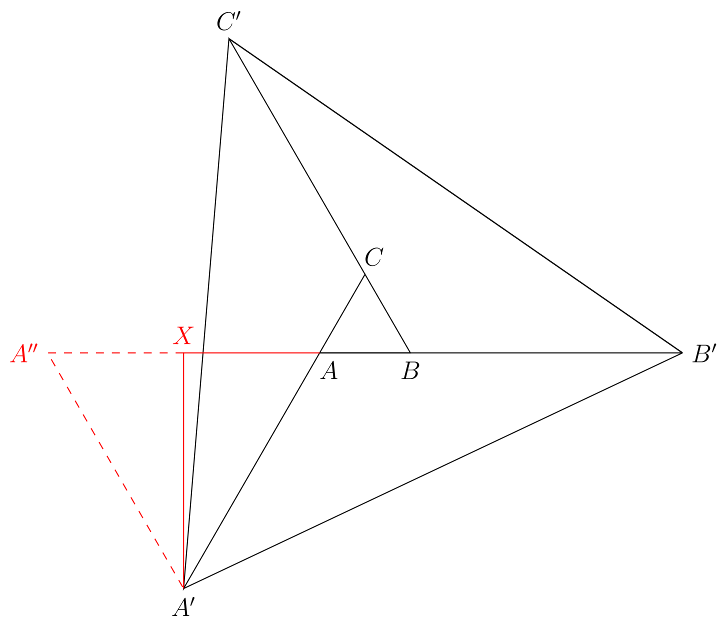
Como solo estamos interesados en la cifra de las unidades, ésta será la misma que la de $3^{(2024^{2022})}$. Como $3^4 = 81$ acaba en uno, todas las potencias de la forma 3^{4k} acaban en uno. Al ser 2024 múltiplo de 4, 2024^{2022} también lo es y, por tanto, el número acaba en uno. Así, la respuesta es E.

92. Comenzamos con un triángulo equilátero ABC. A continuación, extendemos el lado AB hacia B hasta llegar al punto B' de tal manera que $BB' = 3AB$. De manera análoga, alargamos el lado BC hacia C hasta encontrar el punto C' cumpliendo $CC' = 3BC$. Y también definimos el punto A' con $AA' = 3CA$. ¿Cuál es el cociente entre las áreas de los triángulos $A'B'C'$ y ABC?

A) 9 **B**) 16 **C**) 25 **D**) 36 **E**) 37

Solución

Hagamos un dibujo siguiendo los pasos que se indican. Tendremos ahora dos triángulos equiláteros, el ABC y el $A'B'C'$. Trazamos algunas líneas auxiliares para poder calcular el lado de $A'B'C'$.



Según vemos, por construcción, el triángulo $AA'A''$ es equilátero de lado tres veces el de ABC. Si ℓ es el lado de ABC, entonces el lado de $AA'A''$ es 3ℓ. Si nos fijamos en el triángulo rectángulo $A'XB'$, tenemos

$$B'X = \frac{11}{2}\ell, \qquad A'X = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ell.$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras,

$$A'B'^2 = A'X^2 + B'X^2 = \frac{121}{4}\ell^2 + \frac{27}{4}\ell^2 = \frac{148}{4}\ell^2 = 37\ell^2.$$

Como la proporción entre las áreas es igual al cuadrado de la proporción entre los lados, el área de $A'B'C'$ es 37 veces mayor que la de ABC y la respuesta es E.

93. En el último examen que hice a mis estudiantes, nadie tuvo un 0. La media del grupo completo fue 6; la media de los que tuvieron por lo menos un 6 fue 7, y la media del resto del grupo fue 4. ¿Qué proporción de estudiantes tuvo menos de 6?

A) $\frac{1}{4}$ **B**) $\frac{1}{3}$ **C**) $\frac{2}{5}$ **D**) $\frac{3}{8}$ **E**) $\frac{2}{7}$

Solución

Sea A la suma de las notas de los estudiantes que sacan menos de 6 y N_A el total de ellos. Análogamente, sea B la suma de las notas de los estudiantes que sacan por lo menos un 6 y N_B el total de ellos. Entonces,

$$\frac{A}{N_A} = 4, \quad \frac{B}{N_B} = 7, \qquad \frac{A+B}{N_A+N_B} = 6.$$

Lo que nos piden es la proporción de alumnos que sacan menos de un 6, es decir $N_A/(N_A + N_B)$. Usando las relaciones anteriores, resulta $A = 4N_A$ y $B = 7N_B$, por lo que

$$\frac{A+B}{N_A+N_B} = \frac{4N_A+7N_B}{N_A+N_B} = \frac{7(N_A+N_B)-3N_A}{N_A+N_B} = 6 \Rightarrow \frac{N_A}{N_A+N_B} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, la respuesta es B.

94. El producto de dos números enteros positivos es 2160 y sabemos que su máximo común divisor es un número impar mayor que 1. Si m es su mínimo común múltiplo, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdad?

A) $m < 200$ **B**) $200 < m < 400$ **C**) $400 < m < 600$
D) $600 < m < 800$ **E**) $m > 800$

Solución

Si descomponemos en factores primos el número 2160, resulta $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$. Por tanto, el único número impar mayor que 1 que puede ser el máximo común divisor de los números cuyo producto es 2160 es el 3. Puesto que el producto de dos números es igual al producto de su mínimo común múltiplo y su máximo común divisor, resulta

$$2160 = 3 \cdot m \Rightarrow m = 720.$$

De este modo, la única afirmación que es verdad es D.

95. La parábola de ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene su vértice en el punto $V(h, k)$ y, al reflejarse sobre la recta $y = k$, se transforma en la parábola $g(x) = dx^2 + ex + f$. ¿Cuál es el valor de la suma $a + b + c + d + e + f$?

A) $2b$ **B**) $2c$ **C**) $2a + 2b$ **D**) $2h$ **E**) $2k$

Solución

La ecuación de una parábola con el vértice en (h, k) se puede escribir como $a(x-h)^2+k$, por lo que

$$ax^2 + bx + c = a(x-h)^2 + k = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k.$$

La parábola reflejada respecto a $y = k$ tiene por ecuación $-a(x-h)^2 + k$, ya que tiene el mismo vértice pero diferente concavidad, por lo que

$$dx^2 + ex + f = -a(x-h)^2 + k = -ax^2 + 2ahx - ah^2 + k.$$

De este modo, identificando coeficientes, resulta

$$d = -a, \quad e = -b, \quad f = -c + 2k.$$

Por tanto, $a + b + c + d + e + f = 2k$ y la respuesta es E.

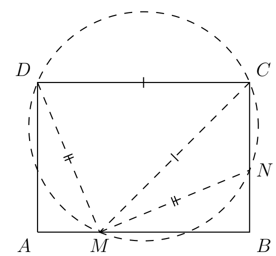
96. Comenúmeros ha escrito todos los números, desde el 1 al 2023, en un papel. ¿Cuál es la diferencia entre la cantidad de unos y de ceros que ha tenido que usar?

A) 78 **B**) 1010 **C**) 1087 **D**) 2023 **E**) 2054

Solución

Vamos a contar la cantidad de ceros que ha utilizado Comenúmeros. Empezaremos contando la cantidad de veces que aparece el 0 como última cifra. Vemos que aparece 9 veces en los números de dos cifras, 90 veces en los de tres cifras y 103 veces en los de cuatro cifras. Como penúltima cifra aparece 90 veces en los números de tres cifras y 110 veces en los de cuatro. Como antepenúltima cifra aparece en 124 números, por lo que el total de ceros es 526. Por su parte, el uno aparece como ultima cifra en 203 números. Como penúltima cifra en 210. Como antepenúltima cifra en 200 y como primera cifra en 1000, lo que hace un total de 1613 unos. Por tanto, la diferencia entre unos y ceros es igual a $1613 - 526 = 1087$ y la respuesta es C.

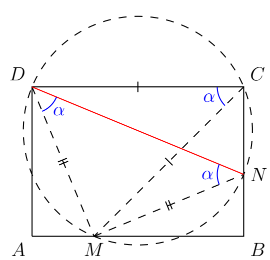
97. En el rectángulo $ABCD$ de la figura, elegimos un punto M en el lado AB y un punto N en el lado BC, de modo que $MD = MN$ y $MC = CD$. Sabiendo además que el cuadrilátero $CDMN$ es cíclico, es decir, existe una circunferencia que pasa por sus cuatro vértices, ¿cuál es la razón AB/BC?



A) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ **B**) $\sqrt{2}$ **C**) $\dfrac{3}{2}$ **D**) $\sqrt{3}$ **E**) 2

Solución

Dibujamos la línea auxiliar DN. Entonces, los ángulos $\angle DCM$ y $\angle DNM$ son iguales, por ser inscritos en la circunferencia y abarcar el mismo arco. Por otra parte, los ángulos $\angle MDN$ y $\angle DNM$ son iguales, por ser el triángulo DMN isósceles.



Si llamamos α a estos ángulos, entonces el ángulo $\angle DMN = 180° - 2\alpha$. Como el cuadrilátero $DCNM$ es cíclico, los ángulos opuestos suman 180°, es decir

$$\angle DMN + \angle DCN = 180° \Rightarrow 180° - 2\alpha + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 45°.$$

Con esto vemos que el triángulo CMB es rectángulo e isósceles, es decir, $BC = BM$. Puesto que $CM = AB$, se cumple que $AB = \sqrt{2}BC$ y la respuesta es B.

98. ¿Cuántos pares de enteros positivos (a, b) verifican que a divide a b siendo $a + 2b = 1010$?

A) 503 **B**) 1 **C**) 2 **D**) 3 **E**) 504

Solución

Como a divide a b, resulta que b es múltiplo de a, por lo que existe $k > 0$ tal que $b = ka$. De este modo

$$a + 2b = a + 2ka = (2k + 1)a = 1010.$$

Así, hemos descompuesto 1010 en producto de dos números, uno de ellos impar, puesto que $2k + 1$ es un número impar. Como $1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$, y $k > 0$, solo hay tres posibles divisores impares de 1010, esto es: 5, 101 y 505. Por tanto, solo hay tres parejas que verifican el enunciado y la respuesta es D.

99. Ana tiene que subir ocho escalones. Lo hace subiendo de uno en uno o de dos en dos, pero no puede pisar el sexto escalón porque está roto. ¿De cuántas formas distintas puede llegar Ana al escalón más alto?

A) 6 **B**) 7 **C**) 8 **D**) 9 **E**) 10

Solución

El problema es equivalente a contar las maneras de llegar hasta el quinto escalón, pues necesariamente tiene que dar un salto de dos escalones para esquivar el sexto. Una vez en el escalón 7, solo puede dar un paso hasta llegar al octavo. Sea a_k el número de maneras de llegar al escalón número k. Está claro que $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$, pues solo hay una manera de subir un escalón y dos de subir dos escalones (bien un escalón y después otro, bien dos escalones de golpe). Pensemos ahora cómo llegar al escalón k. Se puede hacer desde el escalón $k - 1$ subiendo uno o desde el escalón $k - 2$ subiendo dos. Por tanto,

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}.$$

Aplicando esta recurrencia, con los dos primeros valores iniciales,

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3, \quad a_4 = a_3 + a_2 = 5, \quad a_5 = a_4 + a_3 = 8.$$

Así pues, hay 8 maneras diferentes de llegar al escalón 5 y la respuesta es C.

100. La ecuación $x^2 - kx + 36 = 0$ tiene dos soluciones reales, una de las cuales es un entero positivo menor que 1000. ¿Cuántos valores racionales diferentes puede tomar el coeficiente k?

A) 1 **B**) 2 **C**) 3 **D**) 995 **E**) 999

Solución

Para cada n entre 1 y 999, si n es solución de la ecuación, se verifica

$$n^2 - kn + 36 = 0 \Rightarrow k = \frac{n^2 + 36}{n}.$$

De este modo, para cada n hay un valor racional de k que cumple el enunciado. Con esto podemos pensar que hay 999 valores distintos. Ahora bien, puede suceder que dos valores distintos m y n den lugar al mismo valor de k. Esto sucede si

$$\frac{n^2 + 36}{n} = \frac{m^2 + 36}{m} \Rightarrow nm(n - m) = 36(n - m).$$

Como $n \neq m$, la ecuación anterior se cumple si $nm = 36$, con n y m enteros diferentes. Hay 4 posibles soluciones

$$n = 1, m = 36, \quad n = 2, m = 18, \quad n = 3, m = 12, \quad n = 4, m = 9.$$

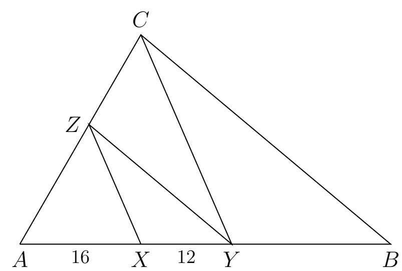
Así, a las 999 soluciones que habíamos obtenido hay que restarle las cuatro repetidas, obteniendo un total de 995 valores diferentes de k. Por tanto, la respuesta es D.

101. Dado un triángulo ABC, sean X un punto del lado AB, Y un punto del segmento XB y Z un punto del lado AC tales que XZ es paralelo a YC e YZ es paralelo a BC. Si $AX = 16$ y $XY = 12$, ¿cuánto mide YB?

A) 8 **B**) $\frac{40}{3}$ **C**) 18 **D**) 21 **E**) 28

Solución

Empecemos por hacer un dibujo con los datos del problema.



Como XZ es paralelo a YC, los triángulos AXZ y AYC son semejantes. Del mismo modo, al ser YZ y BC paralelos, los triángulos AYZ y ABC son semejantes. Por lo tanto, por la semejanza de los triángulos AXZ y AYC, resulta

$$\frac{AC}{AZ} = \frac{AY}{AX}.$$

Por otra parte, de la semejanza de los triángulos AYZ y ABC, resulta

$$\frac{AC}{AZ} = \frac{AB}{AY}.$$

De las dos relaciones de semejanza, se tiene

$$\frac{AY}{AX} = \frac{AB}{AY} \Rightarrow AB = \frac{AY^2}{AX} = \frac{28^2}{16} = 49.$$

De aquí deducimos que $YB = AB - AY = 21$ y la respuesta es D.

102. La parábola $y = x^2 - 600$ pasa por el punto $K(k, k)$ con k entero positivo. ¿Cuál es la suma de las cifras de k?

A) 4 **B**) 5 **C**) 6 **D**) 7 **E**) 8

Solución

Sustituyendo las coordenadas (x, y) por (k, k) en la ecuación de la parábola, se tiene

$$k = k^2 - 600 \Rightarrow k^2 - k - 600 = 0 \Rightarrow k = 25, -24.$$

Como k es positivo, entonces $k = 25$ y la suma de sus cifras es 7. Así pues, la respuesta es D.

103. Julián deja una moneda con la cara hacia arriba en una mesa. Después Lucía deja dos monedas más sobre la mesa y, por último, Miguel se lleva una de las monedas, pero ninguno de los dos se fijó en cómo estaban las monedas. Al final, resulta que las dos monedas que quedan en la mesa tienen la cara hacia arriba. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda que se llevó Miguel también tuviera la cara hacia arriba?

A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{5}{9}$ **E)** $\frac{3}{5}$

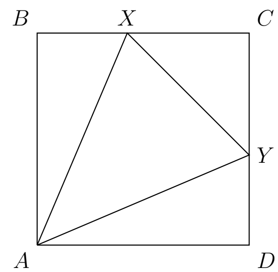
Solución

Sabiendo que sobre la mesa han quedado dos caras, las situaciones posibles de partida son

$$CCC \quad CXC \quad CCX,$$

donde C significa cara y X cruz. A la izquierda está la moneda que dejó Julián y las otras dos son las que dejó Lucía. Como vemos, hay 5 casos en los que Miguel se lleva una moneda y quedan dos caras sobre la mesa, pero solo en tres de ellos la moneda que se lleva Miguel tiene la cara hacia arriba. Por tanto, la probabilidad es $3/5$ y la respuesta es E.

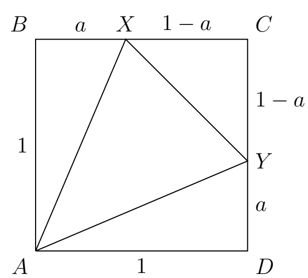
104. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 1. Los puntos X e Y están en los lados BC y CD respectivamente y son tales que los triángulos ABX, XCY y DAY tienen igual área. ¿Cuál es la relación entre el área del triángulo AXY y el área del triángulo XCY?



A) $\sqrt{5}$ **B)** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** $\sqrt{5}-1$ **E)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Solución

Por las condiciones del problema, los triángulos ABX y DAY son iguales, al ser rectángulos, tener la misma área y uno de los catetos iguales. Por tanto, $BX = DY$, cuyo valor denotamos por a. Entonces, $XC = CY = 1 - a$, como se ve en la siguiente figura.



Como los triángulos ABX y XCY tienen la misma área, se deduce que

$$a = (1-a)^2 \Rightarrow a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

La otra raíz de la ecuación de segundo grado se descarta por ser mayor que 1, que es el lado del cuadrado. Si S es el área del triángulo AXY, sumada a la de los otros tres triángulos de igual área nos dará el área del cuadrado que es 1. Así, se tiene

$$S + \frac{3}{2}a = 1 \Rightarrow S = 1 - \frac{3}{2}a = \frac{3\sqrt{5}-5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}\sqrt{5} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Es decir, el área del triángulo AXY es $\sqrt{5}$ veces el área de cualquiera de los triángulos ABX, XCY, DAY, por lo que la respuesta es A.

105. Diego y Valeria tienen que fregar cacharros. Lanzan un número indeterminado de dados para ver quién lo hará. Diego friega si no sale ningún 6 y Valeria friega si sale solo un 6. Si no pasa ninguna de las dos cosas vuelven a tirar. ¿Cuántos dados tienen que lanzar para que ambos tengan la misma probabilidad de fregar los platos?

A) 3 **B**) 5 **C**) 7 **D**) 9 **E**) 12

Solución

Sea n el número de dados que se lanzan. Entonces, la probabilidad que tien diego de fregar los platos es

$$p_d = \left(\frac{5}{6}\right)^n,$$

ya que los resultados que pueden darse en cualquiera de los n dados son todos menos 6. Por su parte, la probabilidad que tiene Valeria de fregar los platos es

$$p_v = n\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1},$$

puesto que en un dado sale un 6 y en los otros $n-1$ cualquier otro número. Además, el dado en el que sale un 6 es cualquiera de los n. Comparando p_d y p_v, está claro que ambas probabilidades son iguales si $n = 5$. Por tanto, la respuesta es B.