Seminario de problemas Curso 2022-23. Hoja 9

65. Isabel tardaría 8 horas en sembrar un campo y Sofía tardaría 10 horas en sembrar ese mismo campo. Deciden unirse y comienzan juntas a sembrar el campo pero al cabo de 2 horas a Isabel le da lumbago y tiene que retirarse. ¿Cuántas horas deberá trabajar sola Sofía para terminar de sembrar el campo?

A) 4.5 **B**) 5 **C**) 5.5 **D**) 6 **E**) 6.5

Solución.

En 40 horas, Isabel y Sofía siembran 9 campos entre las dos. Por tanto, en 2 horas siembran $2 \cdot 9/40 = 9/20$ del campo y quedan por sembrar $11/20$ del campo. Como Sofía siembra a un ritmo de $1/10$ de campo por hora, tardará $11/2$ horas en sembrar lo que queda del campo, es decir, 5.5 horas. Así, la respuesta es la C.

66. ¿Cuántos pares ordenados de números enteros (x, y) satisfacen $x^2 \leq y \leq x + 6$?

A) 14 **B**) 18 **C**) 24 **D**) 26 **E**) 28

Solución.

De la condición se deduce que $x^2 \leq x+6$, es decir $x^2-x-6 \leq 0$. Por tanto, $(x-3)(x+2) \leq 0$, por lo que, siendo x entero, implica que

$$x = -2, -1, 0, 1, 2, 3.$$

Si $x = -2$, entonces $x^2 = 4 = x + 6$, por lo que $y = 4$. En este caso solo hay una pareja que verifica la condición $(-2, 4)$.

Si $x = -1$, entonces $x^2 = 1$ y $x+6 = 5$, por lo que hay 5 pares verificando la desigualdad, $(-1, 1)$, $(-1, 2)$, $(-1, 3)$, $(-1, 4)$ y $(-1, 5)$.

Si $x = 0$, se puede ver que hay 7 pares que cumplen la condición. Estos son

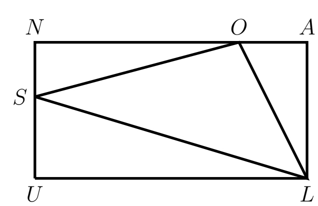
$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 59, (0, 6).$$

También hay 7 parejas en el caso en que $x = 1$:

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7).$$

Hay 5 parejas cuando $x = 2$: (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8). Y solo hay una pareja si $x = 3$: (3,9). Por lo tanto, contando todos los casos, hay 26 pares ordenados que cumplen la condición y la respuesta es D.

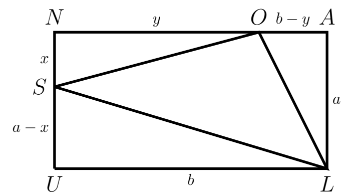
67. El área del rectángulo $LUNA$ es 1, el área de NOS es $\frac{1}{8}$ y el área de LUS es $\frac{1}{3}$. ¿Qué área tiene el triángulo SOL?



A) $\frac{5}{12}$ **B**) $\frac{7}{18}$ **C**) $\frac{1}{2}$ **D**) $\frac{7}{24}$ **E**) $\frac{11}{24}$

Solución.

Llamemos a y b a los lados del rectángulo y x, y a las longitudes de los segmentos NS y NO, respectivamente, como se ve a continuación.

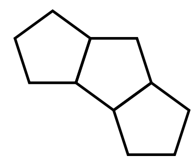


De los datos del problema, tenemos: $ab = 1, xy = 1/4, b(a - x) = 2/3$. Y, como $ab = 1$, entonces $bx = x/a = 1/3$. El área del triángulo OLA es igual a $a(b - y)/2$, es decir $1/2 - ay/2$. Ahora bien, como $x/a = 1/3$ y $xy = 1/4$, dividiendo estas expresiones, resulta $ay = 3/4$ y el área del triángulo OLA es igual a $1/8$. De aquí podemos deducir el área de SOL, puesto que $LUNA = LUS + NOS + OLA + SOL$. Entonces

$$SOL = LUNA - LUS - NOS - OLA = 1 - 1/3 - 1/8 - 1/8 = 5/12$$

y la respuesta es A.

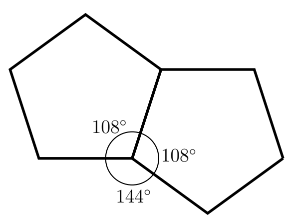
68. Fernando va uniendo pentágonos regulares como se ve al margen. Ya ha colocado tres y se pregunta: ¿cuántos pentágonos necesito para cerrar mi corona y así mi último pentágono quede unido con el primero?



A) 8 **B**) 9 **C**) 10 **D**) 12 **E**) 14

Solución.

Como vemos, al ir uniendo pentágonos, se va formando un polígono regular rodeado de pentágonos. Para saber cuántos pentágonos debemos colocar solo tenemos que saber cuántos lados tiene el polígono regular que se forma. Ahora bien, el ángulo interior de un polígono regular de N lados es igual a $180° - \frac{360°}{N}$. En el caso de un pentágono, este ángulo es igual a $108°$. Por tanto, el ángulo interior del polígono regular que buscamos es $360° - 2 \cdot 108° = 144°$.



De aquí se deduce que el polígono que buscamos tiene 10 lados y la respuesta es C.

69. ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar la función $f(x) = |x - 5| - (x^2 - x - 8)$?

A) 3 **B**) 5 **C**) 8 **D**) 13 **E**) 14

Solución.

Notemos que $f(x)$ es una función definida a trozos de la siguiente forma

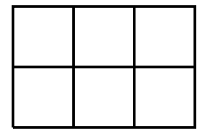
$$f(x) = \begin{cases} 5 - x - (x^2 - x - 8) & \text{si } x \leq 5, \\ x - 5 - (x^2 - x - 8) & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$$

Manipulando un poco las expresiones en cada uno de los trozos, resulta

$$f(x) = \begin{cases} 13 - x^2 & \text{si } x \leq 5, \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$$

Claramente, la función es negativa si $x \geq 5$ y menor o igual que 13 si $x \leq 5$. Por tanto, el valor máximo de la función es 13, que se alcanza cuando $x = 0$ y la respuesta es D.

70. Tengo una ficha roja, dos verdes y tres amarillas y las quiero colocar en las seis casillas del tablero. ¿De cuántas maneras puedo hacerlo si las fichas verdes no pueden estar en casillas que comparten lado?

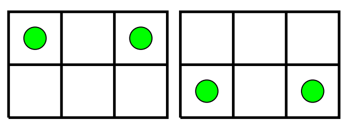


A) 72 **B**) 128 **C**) 64 **D**) 48 **E**) 32

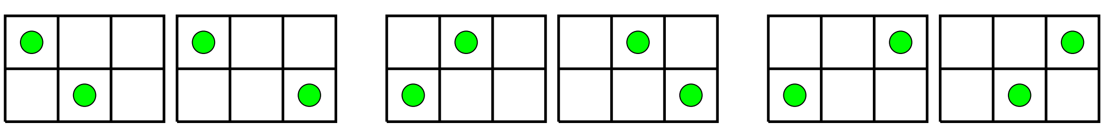
Solución.

Una vez colocadas las fichas verdes, en casillas que no comparten lado, hay cuatro maneras diferentes de completar el tablero, que son las formas de colocar la ficha roja en las cuatro casillas que no ocupan las verdes (las amarillas tienen la posición fijada, una vez colocadas las otras fichas). Por tanto, basta saber de cuántas formas diferentes podemos colocar las fichas verdes.

Si están en la misma fila, solo se pueden poner de una manera. Como hay dos filas, hay dos formas en que se pueden colocar las fichas verdes en la misma fila.

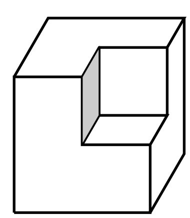


Si, por el contrario, están en filas diferentes, una vez colocada una ficha en la primera fila, la otra ficha verde puede ocupar dos casillas distintas en la segunda fila, cualquiera que no sea la que está debajo. Como hay tres casillas en cada fila, habrá 6 formas de colocar las fichas verdes en dos filas sin que sus casillas compartan lado.



En total hay 8 maneras de colocar las fichas verdes y, por tanto, $8 \cdot 4 = 32$ maneras de colocar todas las fichas. Así, la respuesta es E.

71. Sergio tiene un cubo macizo de madera de 20 cm de arista. Cuando Sol lo ve, con una sierra, le quita un cubito de 1 cm de arista de uno de los vértices (ver figura sin escala) y, como le gusta lo que obtiene, quita otros cubitos de 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 cm de arista de cada uno de los restantes vértices del cubo de Sergio. ¿Cuántos dm^2 de pintura necesitarán los amigos para pintar la figura resultante?



A) 24 **B**) 26 **C**) 28 **D**) 30 **E**) 34

Solución.

Notar que, al quitar una esquina, ni se aumenta ni se disminuye la superficie a pintar. Por tanto, la cantidad de pintura es la misma que se necesita para pintar el cubo original, esto es: $6 \cdot 20 \cdot 20 = 2400\ \text{cm}^2$ de pintura, por lo que la respuesta es A.

72. Si a y b son números enteros, ¿cuál es la suma de todos los valores posibles de a que satisfacen la igualdad $\dfrac{3}{a-1} = \dfrac{b+3}{5}$?

A) 0 **B**) 6 **C**) 8 **D**) 20 **E**) 28

Solución.

La iguadad que nos dan es equivalente a $(a-1)(b+3) = 15$. Factorizando de todas las maneras posibles 15, se tiene:

$$15 = (\pm 1) \cdot (\pm 15),\ (\pm 3) \cdot (\pm 5),\ (\pm 5) \cdot (\pm 3),\ (\pm 15) \cdot (\pm 1).$$

Así, $a-1$ puede tomar los valores $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$. Por tanto, a puede ser:

$$0, -2, -4, -14, 2, 4, 6, 16,$$

cuya suma vale 8 y, la respuesta es C.

73. Don Retorcido está aburrido al pie de una escalera de 32 escalones. De repente divisa a su amigo Comenúmeros en el escalón 22 y decide ir a su encuentro. Para hacerlo más divertido solo se permite dar saltos hacia arriba de 3 escalones y saltos hacia abajo de 4 escalones. ¿De cuántas maneras puede llegar Don Retorcido al escalón de Comenúmeros con el menor número de saltos?

A) 66 **B**) 56 **C**) 55 **D**) 45 **E**) 44

Solución.

Es fácil ver que el mínimo número de saltos que se necesitan para llegar al escalón 22 es de 12 saltos, 10 hacia arriba (hasta el escalón 30) y dos hacia abajo. Para ver de cuántas maneras diferentes se puede llegar al escalón 22, basta con ver cuándo se ejecutan los dos saltos hacia abajo. Ahora bien, los saltos hacia abajo solo se pueden ejecutar si se han subido previamente un número suficiente de escalones. es por ello que distinguimos dos casos.

Caso 1. Inicialmente se han dado 3 saltos hacia arriba, es decir, se han subido 9 escalones. En este caso, los saltos hacia abajo pueden ser cualquiera de los 9 saltos restantes. Esto es

$$\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2!} = 36.$$

Caso 2. Inicialmente se han dado 2 saltos hacia arriba y uno hacia abajo. Después de esto, estamos en el segundo escalón y, por lo tanto, el siguiente salto es necesariamente hacia arriba, colocándonos en el quinto escalón. A partir de aquí, quedan 8 saltos, de los cuales el que es hacia abajo puede ser cualquiera de ellos. Esto nos da 8 casos más.

Así pues, hay $36 + 8 = 44$ formas diferentes de llegar al escalón 22 en el menor número de saltos y la respuesta es E.

74. El magnífico ciclista Van Popel participaba en una contrarreloj individual. Hizo la primera mitad del recorrido a una velocidad media de 30 km/h. Su entrenador le dijo que si quería ganar debería conseguir que su velocidad media en todo el recorrido fuera de 60 km/h. ¿Cuál debe ser su velocidad media en km/h, en la segunda mitad para conseguir su objetivo?

A) 30 **B**) 60 **C**) 90 **D**) 120 **E**) Es imposible

Solución.

Llamemos D a la distancia que debe recorrer Van Popel y T_1 al tiempo invertido en recorrer la primera mitad del recorrido. Entonces,

$$30 = \frac{D/2}{T_1} \longrightarrow T_1 = \frac{D}{60}.$$

Por otra parte, si la velocidad media en todo el recorrido es de 60 km/h y T es el tiempo empleado en recorrerlo completamente, se tiene

$$60 = \frac{D}{T} \longrightarrow T = \frac{D}{60}.$$

Es decir, $T = T_1$, pero claramente $T > T_1$, lo cual es imposible y la respuesta es E.

75. Si expresamos el producto $\left(1-\frac{3}{10}\right)\left(1-\frac{3}{11}\right)\left(1-\frac{3}{12}\right)\cdots\left(1-\frac{3}{100}\right)$ como fracción irreducible $\frac{m}{n}$, ¿cuánto vale la suma $m+n$?

A) 1029 **B**) 2022 **C**) 1679 **D**) 197 **E**) 1926

Solución.

Reduciendo a común denominador cada uno de los términos que están entre paréntesis, el producto que nos dan es igual a

$$\frac{7}{10}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{10}{13}\cdot\frac{11}{14}\cdots\frac{94}{97}\cdot\frac{95}{98}\cdot\frac{96}{99}\cdot\frac{97}{100}.$$

Como se ve, el producto anterior se puede simplificar bastante, ya que hay muchos números repetidos en los numeradores y los denominadores. De hecho, se tiene

$$\frac{7}{\cancel{10}}\cdot\frac{8}{\cancel{11}}\cdot\frac{9}{\cancel{12}}\cdot\frac{\cancel{10}}{\cancel{13}}\cdot\frac{\cancel{11}}{\cancel{14}}\cdots\frac{\cancel{94}}{\cancel{97}}\cdot\frac{\cancel{95}}{98}\cdot\frac{\cancel{96}}{99}\cdot\frac{\cancel{97}}{100} = \frac{7\cdot 8\cdot 9}{98\cdot 99\cdot 100}.$$

Si quitamos los factores comunes de numerador y denominador, para convertir la fracción anterior en irreducible, resulta

$$\frac{7\cdot 8\cdot 9}{98\cdot 99\cdot 100} = \frac{7\cdot 8\cdot 9}{(7\cdot 7\cdot 2)\cdot(9\cdot 11)\cdot(4\cdot 25)} = \frac{1}{7\cdot 11\cdot 25} = \frac{1}{1925}.$$

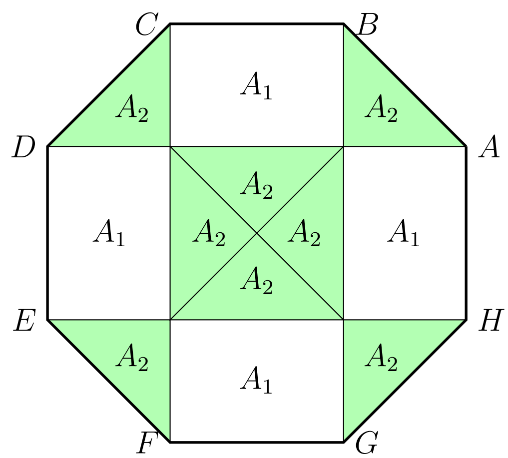
Así pues, $m/n = 1/1925$ y $m+n = 1926$ y la respuesta es E.

76. El octógono regular $ABCDEFGH$ tiene área 1440. ¿Cuál es el área del trapecio $ABCD$?

A) 288 **B**) 360 **C**) 384 **D**) 400 **E**) 480

Solución.

Dividimos el octógono en rectángulos de área A_1 y triángulos de área A_2, como se ve en la siguiente figura



Si $[ABCD]$ es el área del trapecio $ABCD$, entonces

$$4[ABCD] = 4A_1 + 8A_2,$$

que es, precisamente, el área del octógono. Por tanto, el área del trapecio $ABCD$ es la cuarta parte del área del octógono y la respuesta es $1440/4 = 360$, es decir B.

77. Las gráficas de las funciones $y = x^3 + 3$ e $y = 5x + 1$ se cortan en más de un punto. ¿Cuánto suman las abscisas de esos puntos de corte?

A) 0 **B**) 1 **C**) 2 **D**) $\frac{1}{5}$ **E**) $\frac{1}{2}$

Solución.

Las abscisas de los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones verifican la ecuación

$$x^3 + 3 = 5x + 1,$$

es decir $x^3 - 5x + 2 = 0$. Por las fórmulas de Cardano-Vieta, la suma de las soluciones de esta ecuación de tercer grado es igual al coeficiente de x^2, cambiado de signo. En este caso es 0 y la respuesta es A.

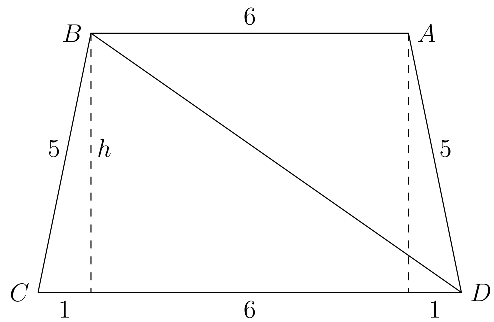
Si queremos comprobar lo anterior, podemos calcular las raíces de la ecuación. Estas son iguales a 2 , que podemos encontrar usando la regla de Ruffini, y $-1 \pm \sqrt{2}$. Su suma es 0, como ya habíamos visto.

78. Del trapecio isósceles $ABCD$ sabemos las longitudes de sus lados: $AB = 6$, $BC = 5$, $CD = 8$, $DA = 5$. ¿Cuánto vale el área del triángulo BCD?

A) 2 **B**) $12\sqrt{2}$ **C**) $4\sqrt{21}$ **D**) $7\sqrt{6}$ **E**) $8\sqrt{6}$

Solución.

Debemos hallar la altura h del trapecio, que es la distancia entre las bases del mismo.



Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene que

$$h = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

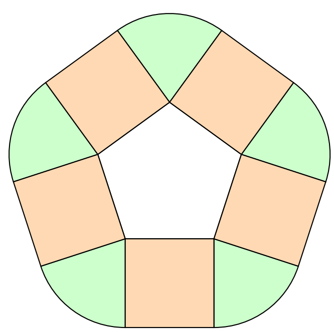
Por tanto, el área del triángulo BCD es igual a $8\sqrt{6}$ y la respuesta es E.

79. Dado un pentágono regular de lado 1 cm, el área, en cm^2, del conjunto de puntos del plano exteriores al pentágono y que se encuentran a menos de 1 cm de distancia de ese pentágono es:

A) $5 + \pi$ **B**) $\dfrac{3}{2} + 2\pi$ **C**) 7 **D**) 8 **E**) 3π

Solución.

Sobre cada lado del pentágono construimos un cuadrado de lado 1 cm. Todos los puntos en el interior de estos cuadrados se encuantran a menos de 1 cm de distancia del pentágono. Ahora bien, entre dos cuadrados consecutivos queda un hueco. Trazamos un arco de circunferencia de radio 1 cm con centro en un vértice del pentágono y que una los vértices de dos cuadrados consecutivos, tal como se ve en la siguiente figura.



Los puntos en el interior de los sectores verdes también están a menos de 1 cm de distancia del pentágono. Así pues, los puntos que se encuentran en uno de los sectores o en uno de los cuadrados son todos aquellos que están a menos de 1 cm de distancia del petágono. Como hay 5 cuadrados de lado 1 cm y los cinco sectores circulares juntos dan lugar a una circunferencia de radio 1 cm, el área pedida es $5 + \pi$ y la respuesta es A.

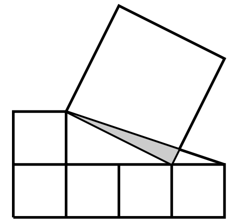
80. Los números enteros a, b, c cumplen que $a^2bc = 1$. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es necesariamente cierta?

A) $a = b = 1$ **B**) $ac = -1$ **C**) $ab^2c = 1$ **D**) $b = c$ **E**) $a \neq 1$

Solución.

Puesto que los números son enteros y su producto es 1, cada uno de ellos es igual a 1 o a -1. Ahora bien $a^2 = 1$, por lo que $bc = 1$ y, entonces $b = c$. La respuesta es D.

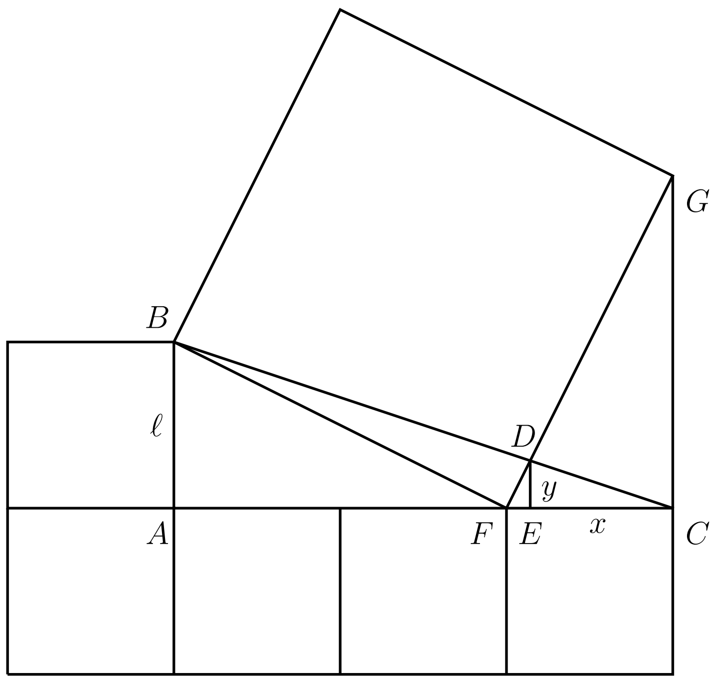
81. En el dibujo ves seis cuadrados, cinco de ellos de área 14. ¿Qué área tiene el triángulo sombreado?



A) 4 **B**) 5 **C**) 6 **D**) 8 **E**) 9

Solución.

Como se ve en la figura, el área del triángulo BDF, que es el sombreado, es igual al área del triángulo BCF menos le del triángulo CDF. Sea ℓ el lado de uno de los cuadrados pequeños y llamemos y a la longitud del segmento DE y x a la del segmento EC.



Los triángulos ABC y EDC son semejantes, por lo que se tiene la relación

$$\frac{y}{\ell} = \frac{x}{3\ell} \longrightarrow x = 3y.$$

Por otra parte, los triángulos DEF y GCF también son semejantes y entonces

$$\frac{y}{2\ell} = \frac{\ell - x}{\ell}.$$

Como $x = 3y$, sustituyendo en la ecuación anterior, resulta

$$y = 2\ell - 6y \longrightarrow y = \frac{2}{7}\ell.$$

Finalmente

$$\text{área}\, BDF = \text{área}\, BCF - \text{área}\, CDF = \frac{1}{2}\ell^2 - \frac{1}{7}\ell^2 = \frac{5}{14}\ell^2.$$

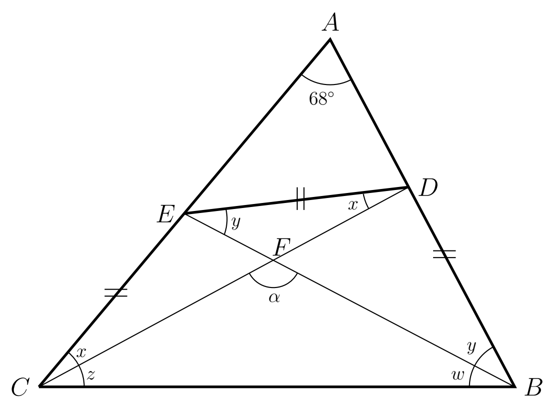
Puesto que $\ell^2 = 14$, el área de BDF es igual a 5 y la respuesta es B.

82. El ángulo $\widehat{BAC}$ del triángulo ABC mide 68°. Los puntos D y E están en los lados AB y AC, respectivamente, y son tales que $BD = DE = EC$. Si los segmentos BE y CE se cortan en el punto F, ¿cuánto mide el ángulo $\widehat{BFC}$?

A) 120° **B**) 121° **C**) 122° **D**) 123° **E**) 124°

Solución.

Hagamos un dibujo para ayudarnos en la resolución del problema. Por las condiciones que nos dan, el triángulo BDE es isósceles, por lo que los ángulos $\widehat{DBE}$ y $\widehat{DEB}$, que denotamos por y, son iguales. También es isósceles el triángulo EDC, por lo que los ángulos $\widehat{CDE}$ y $\widehat{ECD}$, que denotamos por x, son iguales.



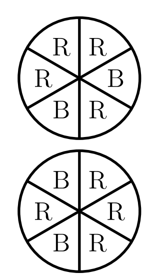
Llamemos α al ángulo $\widehat{BFC}$, que es el que debemos calcular, y z, w a los otros dos ángulos del triángulo BFC. En este triángulo se cumple la relación $z + w + \alpha = 180°$.

Si consideramos ahora el triángulo DEF, vemos que el ángulo $\widehat{DFE}$ es igual a α, por lo que $x + y + \alpha = 180°$. Por lo tanto, $x + y = z + w$ y, considerando ahora el triángulo ABC, resulta

$$x + y + z + w + 68° = 2(x + y) + 68° = 180° \longrightarrow x + y = 56°.$$

Como $x + y + \alpha = 180°$, se deduce que $\alpha = 124°$ y la respuesta es E.

83. Un disco está dividido en seis sectores idénticos. Coloreamos esos sectores de rojo o de blanco. ¿Cuántas configuraciones distintas podemos obtener? Ten en cuenta que las dos configuraciones que te mostramos son la misma, simplemente hemos girado el disco



A) 12 **B**) 14 **C**) 16 **D**) 18 **E**) 20

Solución.

Lo más sencillo es considerar casos:

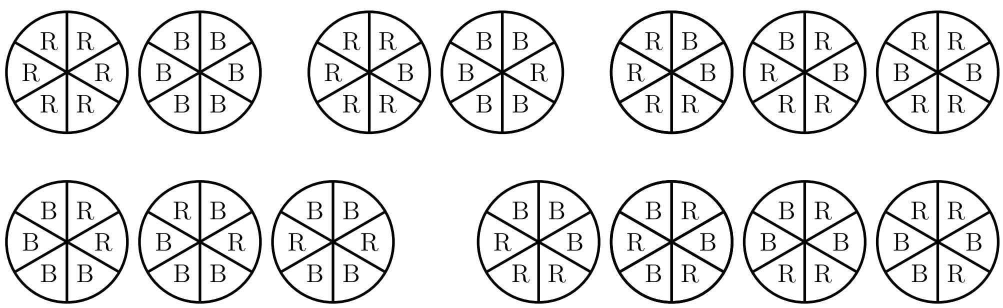
Caso 1. Todos los sectores están pintados del mismo color. En este caso, es evidente que hay dos configuraciones diferentes, cuando todos los sectores son rojos o cuando todos son blancos.

Caso 2. Todos los sectores son de un color, excepto uno que es del otro color. Como antes, solo hay dos configuraciones distintas.

Caso 3. Hay dos sectores de un color y dos del otro. Si suponemos que hay 4 rojos y 2 blancos, basta con fijarnos en el número de sectores rojos que hay entre los dos de color blanco. Así, puede haber, 0, 1 o 2 sectores rojos entre los dos blancos, lo que nos da tres configuraciones. Análogamente, habrá otras tres configuraciones con 4 sectores blancos y 2 rojos.

Caso 4. Hay tres sectores rojos y tres blancos. En este caso, nos fijamos en la forma de agrupar los sectores de un color. Los tres juntos, que da lugar a una configuración; los tres separados, que da lugar a otra configuración; dos agrupados y otro separado, lo que da lugar a dos configuraciones. En total, hay cuatro configutraciones distintas.

Contando todas las configuraciones, hay un total de 14 y la respuesta es B. A continuación se dan las 14 configuraciones diferentes.



84. ¿Cuántos divisores tiene 12!? [Recuerda: $12! = 12 \cdot 11 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$]

A) 24 **B**) 420 **C**) 99 **D**) 792 **E**) 100

Solución.

Si escribimos 12! como producto de factores primos, resulta

$$12! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Por tanto el número de divisores es igual a

$$(10+1)(5+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 792,$$

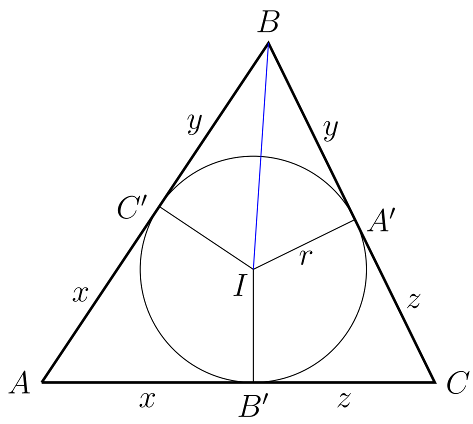
y la respuesta es D.

85. Las lados AB, BC y CA de cierto triángulo ABC miden respectivamente 27, 25 y 26. Si el incentro de este triángulo es el punto I, la medida del segmento BI es:

A) 15 **B**) $9\sqrt{3}$ **C**) $3\sqrt{26}$ **D**) $\frac{2}{3}\sqrt{546}$ **E**) 26

Solución.

Llamemos A', B' y C' a los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con el triángulo, como se ve en la figura.



Los segmentos AC' y AB', que denotamos por x, son iguales, lo mismo que los segmentos BA' y BC', que denotamos por y, así como los segmentos CA' y CB', denotados por z. Como las longitudes de los lados son conocidas, se tiene

$$x + y = 27, \quad x + z = 26, \quad y + z = 25.$$

De aquí se deduce que $x = 14$, $y = 13$, $z = 12$. Por otra parte, el área del triángulo se puede calcular mediante la fórmula de Herón

$$\text{Área } = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

donde a, b, c son los lados del triángulo y $s = (a+b+c)/2$ el semiperímetro. En nuestro caso

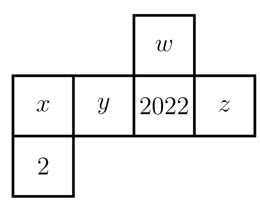
$$\text{Área } = \sqrt{39 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}.$$

Sin embargo, el área del triángulo también es igual al semiperímetro por el radio r de la circunferencia inscrita. Por lo tanto

$$39r = \sqrt{39 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14} \longrightarrow r = 2\sqrt{14}.$$

Teniendo en cuenta que el triángulo BIA' es rectángulo y que conocemos sus catetos $BA' = y = 13$ y $IA' = r = 2\sqrt{14}$, por el teorema de Pitágoras, resulta $BI = 15$. Así, la respuesta es A.

86. El diagrama muestra el desarrollo de un cubo en cuyas caras están escritos los números enteros 2, x, y, 2022, z, w. Cada uno de los números x, y, z, w es la media aritmética de los números que están en las cuatro caras adyacentes a él. ¿Cuánto vale x?



A) 506 **B**) 1214 **C**) 916 **D**) 1012 **E**) 810

Solución.

Podemos observar que y, z tienen las mismas caras adyacentes, por lo que $y = z$. Por otra parte, de la condición del problema se sigue que

$$\begin{cases} x = \frac{y+z+w+2}{4} & \rightarrow \quad 4x - 2y - w = 2, \\ y = \frac{x+w+2+2022}{4} & \rightarrow \quad -x + 4y - w = 2024, \\ w = \frac{x+y+z+2022}{4} & \rightarrow \quad -x - 2y + 4w = 2022. \end{cases}$$

Sumando las tres ecuaciones, se tiene: $2x + 2w = 4048$ y, restando la primera y tercera ecuación, resulta $5x - 5w = -2020$. Es decir, tenemos el sistema de ecuaciones

$$x + w = 2024, \quad x - w = -404,$$

de donde se deduce que $x = 810$ y la respuesta es E.

87. ¿Cuál es la suma de las soluciones de la ecuación $\left(2 \cdot 4^{x^2-3x}\right)^2 = \dfrac{2^x}{2}$?

A) 3 **B**) $\dfrac{13}{4}$ **C**) $\dfrac{7}{4}$ **D**) $\dfrac{3}{2}$ **E**) 0

Solución.

Manipularemos convenientemente las expresiones para obtener una igualda entre dos potencias de 2. Así, se tiene

$$\left(2 \cdot 4^{x^2-3x}\right)^2 = 2^2 \cdot 4^{2x^2-6x} = 2^2 \cdot \left(2^2\right)^{2x^2-6x} = 2^2 \cdot 2^{4x^2-12x} = 2^{4x^2-12x+2}.$$

Por otra parte $\dfrac{2^x}{2} = 2^{x-1}$, por lo que

$$4x^2 - 12x + 2 = x - 1 \longrightarrow 4x^2 - 13x + 3 = 0.$$

Si x_1, x_2 son las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c$, por las fórmulas de Cardano-Vieta, se tiene

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

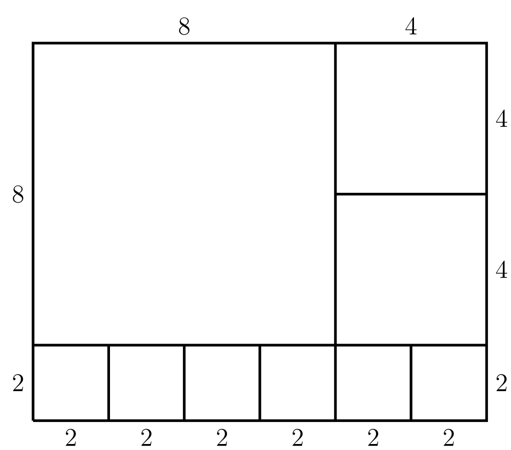
En nuestro caso $x_1 + x_2 = 13/4$ y la respuesta es B.

88. Recortando un cartón rectangular obtenemos nueve cuadrados: uno de ellos tiene área 64 cm^2, dos tienen área 16 cm^2 y seis tienen área 4 cm^2. El perímetro del rectángulo inicial, en cm, es:

A) 44 **B**) 46 **C**) 52 **D**) 62 **E**) 68

Solución.

Podemos ver que la descomposición es como sigue



Por tanto, el perímetro es 44 y la respuesta es A.

89. ¿Cuántos pares ordenados (x, y) de enteros positivos verifican que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{540}{xy} = 2$?

A) 4 **B**) 8 **C**) 16 **D**) 24 **E**) 48

Solución.

Multiplicando la igualdad por xy, resulta

$$y + 540 = 2xy \Rightarrow 540 = 2xy - y = y(2x - 1).$$

Como $2x - 1$ es siempre un número impar, el número de parejas que buscamos será igual al número de divisores impares de 540. Como $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$, los divisores impares de 540 son los que provienen de los factores primos 3 y 5, que son 8. Así, la respuesta es B.