Seminario de problemas Curso 2021-22. Hoja 9

61. Sea n un entero positivo cualquiera. Prueba $n^3 - n$ siempre es divisible por 6.

Solución. Como
$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$$
tenemos tres números enteros consecutivos. Uno de ellos es múltiplo de 3 y al menos uno es múltiplo de 2, así que su producto es múltiplo de 6.

62. Sea k un entero positivo. Prueba que el número $4k + 2$ no puede ser un cuadrado.

Solución. Si n es impar, su cuadrado es impar, luego no tiene la forma $4k + 2$. Si $n = 2m$ es par, su cuadrado es $n^2 = 4m^2$, que es múltiplo de 4, al contrario que $4k + 2$.

63. Sea n un entero positivo impar. Prueba que, al dividir n^2 entre 8, el resto siempre es 1.

Solución. Si n es impar, es de la forma $4k+1$ o $4k-1$. Así que, respectivamente, su cuadrado es de la forma $16k^2+8k+1 = 8(2k^2+k)+1$ o de la forma $16k^2-8k+1 = 8(2k^2-k)+1$. En ambos casos, el resto al dividir por 8 es 1.

64. Sea n un entero positivo; por ejemplo, $n = 13$ (el número no es importante). Prueba que n tiene un múltiplo que se expresa como una ristra de varios dígitos «4» seguida de una ristra de varios «0».

Solución. Es un ejercicio del principio del palomar clásico y muy sencillo. De los números 4, 44, 444, 4444, etc., hay dos que tienen que tener el mismo resto al dividir por 13, y su diferencia es de la forma pedida.

65. Demuestra que en una fiesta siempre hay, al menos, dos personas que conocen al mismo número de invitados. (Nota: «Conocerse» es recíproco, es decir, si Ana conoce a María, forzosamente María conoce a Ana.)

Solución. Supongamos que en la fiesta hay n personas. Si todo el mundo conoce a alguien, las posibilidades para el número de invitados conocidos por cada persona concreta son $1, 2, 3, \dots$ hasta $n - 1$. Como hay más personas que posibilidades, dos deben coincidir. Si, por el contrario, hay alguna persona que no conoce a nadie (luego nadie le conoce a él, pues estamos suponiendo que conocerse es recíproco), las posibilidades son $0, 1, 2, \dots$ hasta $n - 2$, y el argumento es el mismo.

66. En el juego de la quiniela, una apuesta es una secuencia de 14 signos que pueden ser «1», «X» o «2». La quiniela premiada es una secuencia concreta de tales signos. El número de aciertos de una apuesta es el número de signos que coinciden, en su posición, con la quiniela premiada. ¿Cuántas apuestas tenemos que hacer para garantizar que en alguna de ellas hay, al menos, 5 aciertos? Con una apuesta menos, ¿cuántos aciertos podemos garantizar?

Solución. Bastan 3: todo 1, todo X, todo 2. Con dos apuestas no puedo garantizar ningún acierto (siempre puede ser el que no hemos puesto).

67. En un torneo de tenis, lo más habitual es que participen $n = 2^k$ jugadores, para k un entero positivo. De ese modo, en cada ronda se eliminan la mitad de los jugadores, y las últimas rondas son la final, las semifinales, los cuartos de final, los octavos de final, etc. De ese modo, ¿cuántos partidos se juegan? Si n no es una potencia de 2 ya no se puede organizar un torneo tan bien ordenado, y, por ejemplo, algunos jugadores tienen que disputar fases previas. En ese caso, y para n cualquiera, ¿cuántos partidos se disputarán?

Solución. Siempre se juegan $n - 1$ partidos. En cada partido se elimina a un jugador, hasta que queda 1 (el ganador), así que forzosamente tiene que haber $n - 1$ partidos. Si $n = 2^k$ eso se puede hacer sumando una progresión aritmética (el número de partidos en cada ronda).

68. Supongamos que tenemos una serie de objetos idénticos dispuestos en forma de cuadrado (igual número de filas que de columnas), y que los movemos para colocarlos formando un rectángulo en el que el número inicial de filas ha aumentado en 5. ¿Cuántos objetos tenemos?

Solución. Inicialmente tenemos los objetos colocados en n filas y n columnas; en total, n^2 objetos. Luego aumentamos el número de filas a $n+5$, con lo cual disminuimos el número de columnas a, digamos, $n - c$. El total es $(n + 5)(n - c)$, que debe ser igual a n^2. La ecuación $(n + 5)(n - c) = n^2$ se reescribe fácilmente como $(5 - c)n = 5c$. Mirando los signos de esta ecuación y teniendo en cuenta que c debe ser entero, sólo puede ser $c = 1$, 2, 3 o 4. Ahora chequeamos esos valores: con $c = 1$ queda $4n = 5$ (imposible); con $c = 2$ queda $3n = 10$ (imposible); con $c = 3$ queda $2n = 15$ (imposible); con $c = 4$ queda $n = 20$. Ésta es la solución. Así pues, el número de objetos es 400, el cuadrado es 20×20 y el rectángulo 25×16.