Seminario de problemas. Curso 2017-18. Soluciones de la hoja 9

64. Hallar todos los polinomios $P(t)$ de una variable, que cumplen

$$P(x^2 - y^2) = P(x+y)P(x-y) \tag{1}$$

para todos los números reales x e y.

Solución. Los polinomios que cumplen la ecuación (1) son $P(t) = 0$, $P(t) = 1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $P(t) = t^n$.

Haciendo $x = y$ obtenemos

$$P(0) = P(2x)P(0).$$

De modo que si $P(0) \neq 0$ entonces $P(t) = 1$ para todo t. Supongamos que $P(0) = 0$. Entonces existe un polinomio Q tal que

$$P(t) = tQ(t).$$

Es fácil comprobar que Q también es solución de (1). Repitiendo los razonamientos anteriores obtenemos que P es el polinomio nulo o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(t) = t^n$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

65. Ejercicio. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función tal que

$$f(f(n)) + 2f(n) = 3n + 4,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Determínese $f(2018)$.

Solución. Empecemos probando con $n = 1$. En ese caso se tiene

$$f(f(1)) + 2f(1) = 7 \Rightarrow f(f(1)) = 7 - 2f(1).$$

Como los valores de la función f son naturales, debe ser que
$7 - 2f(1) \geq 1$, por lo que $1 \leq f(1) \leq 3$. Analicemos los tres posible casos.

Caso 1. Si $f(1) = 1$, entonces $f(f(1)) = f(1) = 1$, pero entonces

$$f(f(1)) + 2f(1) = 3 \neq 7, \text{ por lo que } f(1) \neq 1.$$

Caso 2. Nos queda comprobar el caso en que $f(1) = 3$. Entonces

$$f(f(1)) = f(3) = 7 - 2f(1) = 1 \Rightarrow f(f(3)) = f(1) = 13 - 2f(3) = 11,$$

que es un absurdo.

Caso 3. Si $f(1) = 2$, entonces

$$f(f(1)) = f(2) = 7 - 2f(1) = 3.$$

Análogamente,

$$f(f(2)) = f(3) = 10 - 2f(2) = 4.$$

Conjeturamos que $f(n) = n + 1$ y lo probamos por inducción. Como ya hemos visto que $f(1) = 2$, falta comprobar el paso inductivo. Así que suponemos que $f(n) = n+1$ y queremos ver que $f(n+1) = n+2$. Ahora bien

$$f(f(n)) = f(n+1) = 3n + 4 - 2f(n) = 3n + 4 - 2(n+1) = n + 2$$

Por tanto $f(n) = n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De modo que la única solución posible es $f(n) = n + 1$ y $f(2018) = 2019$.

66. Hallar todas las funciones $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$f(x)f(y) + f(\frac{\lambda}{x})f(\frac{\lambda}{y}) = 2f(xy), \tag{2}$$

para todo par de números reales x e y positivos, siendo λ un número real positivo tal que $f(\lambda) = 1$.

Solución. Se tiene que $f(1) = 1$, ya que si evaluamos en $x = y = 1$ la ecuación (2) y utilizamos que $f(\lambda) = 1$, nos queda

$$f(1)^2 + 1 = 2f(1) \Leftrightarrow (f(1) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1.$$

Si hacemos $y = 1$ en (2), teniendo en cuenta que $f(1) = f(\lambda) = 1$, obtenemos

$$f(x) + f(\frac{\lambda}{x}) = 2f(x) \Leftrightarrow f(\frac{\lambda}{x}) = f(x), \tag{3}$$

para todo $x \in (0, \infty)$. Sustituyendo la relación anterior en (2), llegamos a que para todo x, y en $(0, \infty)$,

$$f(x)f(y) = f(xy). \tag{4}$$

En particular,

$$f(x^2) = f(x)^2.$$

Como x^2 recorre todos los números en $(0, \infty)$, se sigue que f es una función positiva.

Eligiendo $y = \lambda/x$ en la ecuación (4) y según (3), obtenemos

$$f(x)f(\lambda/x) = 1 \Rightarrow f(x)^2 = 1 \Rightarrow f(x) = 1, \forall x \in (0, \infty).$$

En la última implicación hemos utilizado que f es positiva. De modo que toda solución de la ecuación (2) es constante e igual a 1 en $(0, \infty)$. Con una comprobación inmediata se observa que dicha función es solución de (2).

67. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1. \tag{5}$$

Solución. Las soluciones son las funciones $f_1(x) = -1$ y $f_2(x) = x + 1$.

Es fácil comprobar que dichas funciones son soluciones de (5). Veamos que son las únicas. Consideremos $y = f(x)$ en la ecuación (5), entonces

$$f(x - f(f(x))) = -1. \tag{6}$$

Eso significa que -1 es un punto de la imagen de f. Sea y tal que $f(y) = -1$. Evaluando (5) en ese valor, nos queda

$$f(x + 1) = f(f(x)) \Leftrightarrow f(x) = f(f(x - 1)). \tag{7}$$

Utilizando estás relaciones en las ecuaciones (5) y (6), nos queda

$$f(x - f(x + 1)) = -1 \Leftrightarrow f(x - 1 - f(x)) = -1,$$
$$f(x - f(y)) = f(x + 1) - f(y) - 1.$$

Haciendo $y = x$ en esta última ecuación y utilizando nuevamente (7), llegamos a

$$f(x+1) - f(x) = f(x - f(x)) + 1 = f(f(x - f(x) - 1)) + 1 = f(-1) + 1.$$

De modo que

$$f(x+1) - f(x) = A, \quad \forall x \in \mathbb{Z},$$

con $A = f(-1) + 1$. Por inducción matemática en x, nos queda que

$$f(x) = Ax + B,$$

donde $B = f(0)$. Sustituyendo en (5) la expresión anterior para f obtenemos

$$\begin{aligned} A(x - (Ay + B)) + B &= A(x - f(y)) + B \\ &= Af(x) + B - (Ay + B) - 1 = A(Ax + B) - Ay - 1 \\ \Leftrightarrow Ax - A^2y - AB + B &= A^2x - Ay + AB - 1 \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$ ó $y = 0$, nos queda el sistema

$$A = A^2, \, -AB + B = AB - 1.$$

Por tanto, las únicas soluciones son las funciones f_1 y f_2 dadas más arriba, que corresponden a $A = B = 1$ y $A = 0$, $B = -1$.

68. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumple

$$f(f(n)) = n + 1. \tag{8}$$

Solución. Asumimos que existe una función que cumple las condiciones del problema para llegar a una contradicción. Sea $a := f(1) \in \mathbb{N}$. Veamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$f(n) = a + n - 1. \tag{9}$$

Tomamos $n = 1$ en la ecuación (8),

$$f(a) = f(f(1)) = 2.$$

Por tanto,

$$f(2) = f(f(a)) = a + 1.$$

De ese modo comprobamos que la ecuación (9) se cumple cuando $n = 2$ y, como $f(1) = a$, también se cumple cuando $n = 1$. Veamos que si se cumple para $n = k \in \mathbb{N}$, entonces también se cumple para $n = k + 1$. Así, supongamos que

$$f(k) = a + k - 1.$$

De donde, por (8),

$$k + 1 = f(f(k)) = f(a + k - 1). \tag{10}$$

De aquí y (8) se obtiene

$$f(k+1) = f(f(a + k - 1)) = a + k$$

Por el principio de inducción, la igualdad (9) es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que las igualdades (9) y (10) nos llevan a una contradicción. En efecto, de ellas deducimos que

$$k + 1 = f(a + k - 1) = a + (a + k - 1) - 1 = 2a + k - 2 \Leftrightarrow f(0) = a = 3/2,$$

que es imposible. ∎

Otra solución de José Luis Arregui.

(1) Una tal f es inyectiva: si $f(n) = f(m)$ entonces (aplicando f en ambos términos) $n+1 = m+1$, luego $n = m$.

(2) Además, $f(n)$ es distinto de n para todo n (de lo contrario, para algún n resultaría que $f(f(n))$, que es $n+1$, sería $f(n)$, o sea n, contradicción).

(3) En particular $f(1)$ no es 1; pongamos que $f(1) = k+1$. O sea, $f(1) = f(f(k))$. Como f es inyectiva concluimos que $1 = f(k)$.

(4) Y sabemos que k no es 1, pongamos $k = j+1$, con lo que k es igual a $f(f(j))$ y $1 = f(k) = f(f(f(j))) = f(j)+1$, contradicción.

Alternativamente después de (3) razonamos así: la condición dice que todo número mayor o igual a 2 está en la imagen de f, y por (3) vemos que también lo está 1, luego f es suprayectiva. Como ya teníamos que es inyectiva resulta que es biyectiva, pero entonces también lo sería f compuesto con f, contradicción porque la condición dice que esta función nunca toma el valor 1.

69. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que para todo $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ verifican las condiciones siguientes:

$$f(x,x) = x, \quad f(x,y) = f(y,x), \quad (x+y)f(x,y) = yf(x,x+y). \tag{11}$$

Solución. La única función f que satisface las condiciones del problema es

$$f(x,y) = [x,y],$$

donde $[x, y]$ representa el mínimo común múltiplo de x, y.

Observar que si $x = da$, $y = db$, con a, b primos relativos $(a, b) = 1$, entonces

$$[x,y] = dab.$$

Se comprueba fácilmente que $f(x, y) = [x, y]$ satisface las condiciones del problema.

También se comprueba trivialmente que $f(1, n) = f(n, 1) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; en efecto,

$$f(1,1) = 1,$$

y si para cierto $k \geq 1$,

$$f(1,k) = k,$$

eligiendo $x = 1$, $y = k$, en (11), nos queda

$$(k+1)f(1,k) = kf(1,k+1) \Leftrightarrow k+1 = f(1,k+1).$$

Observemos ahora que si f es una solución del problema y

$$f(x,y) = [x,y], \text{ entonces también } f(x,x+y) = [x,x+y]. \tag{12}$$

Si $x = da$, $y = db$ con $(a, b) = 1$, entonces sustituyendo en (11), nos queda

$$\begin{aligned}(da+db)f(da,db) = dbf(da,da+db) \Leftrightarrow f(x,x+y) &= f(da,da+db)\\ &= da(a+b) = [x,x+y].\end{aligned}$$

Probemos que la única solución del problema es $f(x,y) = [x,y]$. Lo haremos por inducción en n, donde $\max\{x,y\} \leq n$. Es trivial que la afirmación es cierta para $n = 1$. Supongamos que es cierta para todo (x,y), con $\max\{x,y\} \leq k$. Veamos que es cierta todo $\max\{a,b\} \leq k+1$. Entonces basta considerar el caso $a = k+1$ e $b \leq k$. Según (12), con $x = b \leq k$, $y = a - b = k + 1 - b \leq k$, nos queda

$$f(b, k+1) = f(b,a) = f(b, b+a-b) = [b, k+1].$$

70. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy). \tag{13}$$

Solución. Las soluciones son $f(x) = 0$ y $f(x) = \pm(x-1)$.

Evaluando en $y = 0$, nos queda

$$f(f(0)f(x)) + f(x) = f(0). \tag{14}$$

Si $f(0) = 0$, $f(x) = 0$ para todas $x \in \mathbb{R}$.

Supongamos que $f(0) \neq 0$. Evaluando en $y = \frac{x}{x-1}$ (observar que $x + y = xy$ si y solo si $y = \frac{x}{x-1}$), con $x \neq 1$, nos queda

$$f(f(x)f(\frac{x}{x-1})) = 0.$$

De donde se concluye que no existe $x \neq 1$ tal que $f(x) = 0$, porque si tal valor de x existiese, la función se tendría que anular en 0. Además, $f(1) = 0$, porque la función se anula en algún punto, precisamente en los puntos de las forma $f(x)f(\frac{x}{x-1})$. Por tanto,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, \tag{15}$$

$$f(x)f(\frac{x}{x-1}) = 1, \quad \forall x \neq 1.$$

Haciendo $x = 0$ en la ecuación anterior, nos queda

$$f(0)^2 = 1 \Leftrightarrow f(0) = \pm 1.$$

Suponemos en lo que sigue que $f(0) = 1$. Las cuentas y los razonamientos son similares cuando $f(0) = -1$. La ecuación (14) queda

$$f(f(x)) + f(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Evaluando en $y = 1$ obtenemos

$$1 + f(x+1) = f(x).$$

De esta igualdad y por el principio de inducción se obtiene

$$n + f(x+n) = f(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

Tomando $x = 1$, en particular, tenemos que

$$f(n) = 1 - n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Y, por (15), estos son los únicos valores donde f toma cada uno de esos valores enteros. Utilicemos esto para probar que f es inyectiva. Supongamos que

$$f(a) = f(b).$$

Atendiendo a (17), podemos considerar que a es suficientemente grande y, por tanto, existen x, y tales que

$$x + y = a, \quad xy = b - 1.$$

Observar que para que tales valores x, y existan debe cumplirse que la ecuación siguiente tenga solución x real

$$x + (b-1)/x = a \Leftrightarrow x^2 - ax + b - 1 = 0,$$

de modo que

$$a^2 \geq 4(b-1).$$

Esta condición se puede asumir porque, según (17),

$$n + f(a+n) = f(a) = f(b) = n + f(b+n),\ (a+n)^2 \geq 4(b+n-1) \text{ para } n \text{ grande.}$$

Evaluando en (13) dichos valores de x e y y utilizando (16), tenemos

$$f(f(x)f(y)) + f(a) = f(b-1) = f(b) + 1,$$

que nos lleva a

$$f(f(x)f(y)) = 1 \Leftrightarrow f(x)f(y) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ó } y = 1 \Rightarrow a = b.$$

Por tanto, f es inyectiva.

Evaluado en $y = 1 - x$ la ecuación (13), obtenemos

$$f(f(x)f(1-x)) = f(x(1-x)),$$

que por la inyectividad de f, es equivalente a

$$f(x)f(1-x) = x(1-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo x por $f(x)$ y haciendo uso de (16), tenemos

$$f(f(x))f(1-f(x)) = f(x)(1-f(x)) \Rightarrow (1-f(x))f(1-f(x)) = f(x)(1-f(x)) \\ \Rightarrow f(1-f(x)) = f(x).$$

Por tanto, por la inyectidad de f,

$$1 - f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 1 - x.$$

Si consideramos que $f(0) = -1$, se procede de igual forma y se obtiene que la solución es $f(x) = x - 1$.

Otras ideas para la solución de José Luis Arregui. Una vez probado que f es inyectiva, una forma alternativa de concluir que $f(x) = 1 - x$ para todo x es como sigue:

Sabemos que $f(f(x)) = 1 - f(x)$ para todo x, así que es cierto que $f(x) = 1 - x$ para cualquier x en la imagen $f(\mathbb{R})$. Es decir, para x en la imagen resulta que $x = 1 - f(x) = f(f(x))$. Por tanto, para cualquier x podemos asegurar que $f(x) = f(f(f(x)))$; y, por ser f inyectiva, que $x = f(f(x))$, con lo que $x = 1 - f(x)$ y en efecto $f(x) = 1 - x$.