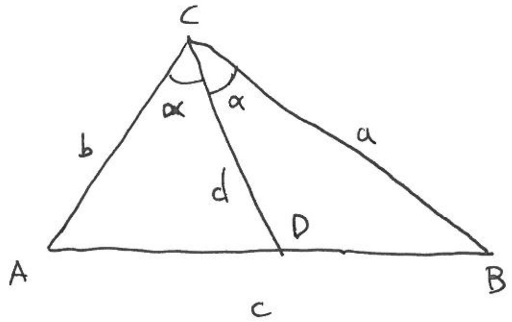
Problema 91



Llamemos $d = CD$ y $\alpha = \frac{\hat{C}}{2}$

El área del triángulo $\widehat{ABC}$ es la suma de las áreas de los triángulos $\widehat{ACD}$ y $\widehat{BCD}$:

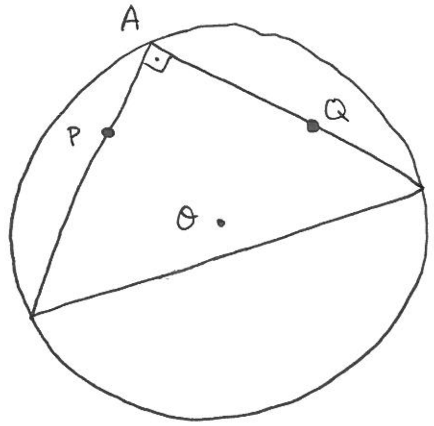
$$\frac{1}{2} ab \operatorname{sen}(2\alpha) = \frac{1}{2} bd \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2} ad \operatorname{sen}\alpha$$

$$= \frac{1}{2} d \operatorname{sen}\alpha \,(a+b)$$

Sustituimos $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$, y como $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ podemos cancelarlo:

$$ab\cos\alpha = \frac{1}{2} d\,(a+b) \implies d = \frac{2ab\cos\alpha}{a+b}$$

Problema 92



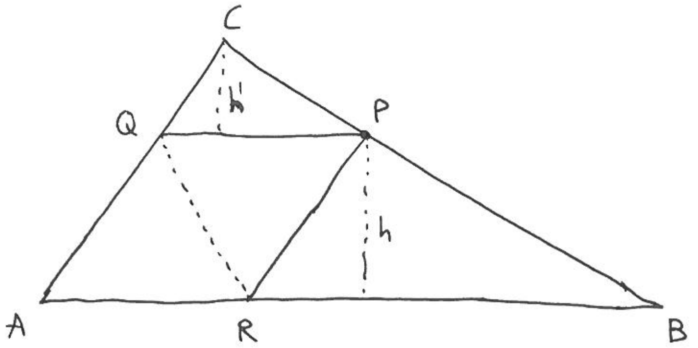
Buscamos un punto A en la circunferencia tal que el ángulo $\widehat{PAQ}$ mida 90 grados.

El lugar geométrico de los puntos del plano A tales que $\widehat{PAQ}$ es 90° es el ARCO CAPAZ de 90°, es decir, la circunferencia cuyo diámetro es PQ.

Simplemente trazamos dicha circunferencia, y si corta a la circunferencia inicial en al menos un punto ya tenemos el vértice A del ángulo recto de nuestro triángulo. Los otros dos vértices serán los puntos de corte de las rectas AP y AQ con la circunferencia inicial.

El problema no tiene solución si estas dos circunferencias no se cortan, es decir, llamando M al punto medio del segmento PQ, si $OM + \frac{PQ}{2}$ es menor que el radio de la circunferencia inicial.

Problema 93



Llamamos h a la altura del triángulo RBP que parte del vértice P.

Análogamente, sea h' la altura de QPC que parte de h'.

Como QP es paralelo a AB, la altura del triángulo ABC es $h+h'$.

Los triángulos RBP y QPC son semejantes, y la razón entre sus áreas es k^2, luego la razón entre sus lados y alturas es k:

$$RB = k \cdot QP \qquad h = k \cdot h'$$

$$\frac{\text{área}(ARQ)}{\text{área}(ABC)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AR \cdot h}{\frac{1}{2} AB \cdot (h+h')} = \frac{AR}{AR+RB} \cdot \frac{1}{\frac{h+h'}{h}} =$$

$$\underset{AR=QP}{=} \frac{1}{1+k} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{k}} = \frac{k}{(1+k)^2}$$

Problema 94

Primero expresamos el lado c en función de $a, b, \hat{C}$ gracias al teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

Ya sabemos que $\cos\hat{C}$ tiene un valor fijo.

También sabemos que la superficie S está fijada:

$$S = \frac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}\,\hat{C}$$

Por tanto el producto ab tampoco varía.

Así, c será mínimo cuando a^2+b^2 sea mínimo, sabiendo que su producto ab está fijado.

Por la desigualdad entre las medias cuadrática y geométrica:

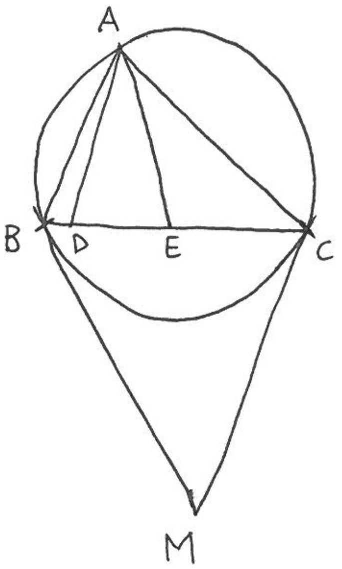
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{ab} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^2+b^2 \geq 2ab$$

Y la igualdad se da si y solo si $a=b$.

En conclusión, c es siempre mayor o igual que $\sqrt{2ab(1-\cos\hat{C})}$, y la igualdad se da cuando

$$a = b = \sqrt{\frac{2S}{\mathrm{sen}\,\hat{C}}}$$

Problema 95



Llamamos M al punto de corte de las tangentes a la circunferencia en B y C.

Así AD es paralela a CM,

AE - - - - - - BM.

Si hemos hecho un buen dibujo con regla, escuadra, cartabón y compás, podemos sospechar que los triángulos $\overset{\frown}{ABC}$ y $\overset{\frown}{ADC}$ son semejantes.

En efecto, tienen el ángulo $\hat{C}$ común, y:

$$\widehat{ADC} \;\overset{\text{AD y CM son paralelas}}{=\!=\!=\!=\!=}\; \widehat{BCM} \;\overset{\text{abarcan el mismo arco}}{=\!=\!=\!=\!=}\; \widehat{BAC}$$

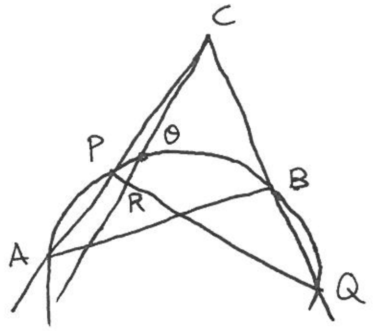
Por lo tanto sus lados son proporcionales:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC} \iff CD \cdot BC = (AC)^2 \qquad (1)$$

Análogamente probamos que $BE \cdot BC = (AB)^2$ (2)

Dividiendo (2) entre (1) obtenemos el resultado.

Problema 96



Como siempre, empezamos el problema por el final.

Tenemos que probar que los ángulos $\widehat{RCQ}$ y $\widehat{CQR}$ son complementarios.

El ángulo $\widehat{CQR}$ es igual al ángulo $\widehat{CAB}$, por ser ambos ángulos inscritos que abarcan la misma longitud de arco.

Hemos simplificado mucho el problema. Ahora basta demostrar que $\widehat{CAB}$ y $\widehat{OCB}$ son complementarios, sabiendo que O es el circuncentro. Por tanto podemos olvidarnos de los puntos P y Q y de la circunferencia S.

$$O \text{ circuncentro} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ACO} = \widehat{CAO} \\ \widehat{ABO} = \widehat{BAO} \\ \widehat{BCO} = \widehat{CBO} \end{cases}$$

Pero la suma de estos seis ángulos es 180°, luego:

$$\widehat{CAB} + \widehat{OCB} = \widehat{CAO} + \widehat{BAO} + \widehat{BCO} = 90^\circ$$