

58. Los coeficientes binomiales aparecen en el desarrollo de un binomio, de manera que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n, \quad 0! = 1.$$

a) Prueba que  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .

b) Prueba las identidades:  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ,  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ .

c) Sea  $n$  un entero impar mayor que 1. Prueba que la sucesión

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$$

contiene un número impar de números impares.

*Solución.*

a) Notemos que  $(a+b)^n = (b+a)^n$ . Igualando el coeficiente de  $a^k$  en las dos expresiones, resulta la identidad pedida. Esto también es evidente a partir de la expresión de los coeficientes binomiales.

b) Para la primera identidad, basta tomar  $a = b = 1$  y se tiene

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

como queríamos probar.

Para la segunda, tomamos  $a = 1$  y  $b = -1$ , por lo que  $(a+b)^n = 0$  y se obtiene la segunda identidad.

c) Usando los apartados a) y b), resulta

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n = 2 \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Puesto que  $\binom{n}{0} = 1$ , se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \binom{n}{k} = 2^{n-1} - 1,$$

que es un número impar. Es decir, el número de sumandos impares en la expresión de la izquierda debe ser impar, lo que es equivalente a lo que nos piden probar.

- 59.** De todas las fracciones irreducibles,  $\frac{p}{q}$ , tales que  $0 < \frac{p}{q} < 1$ , ¿cuántas de ellas cumplen que  $p \cdot q = 20!$ ?

*Solución.*

Si descomponemos  $20!$  en producto de factores primos, resulta

$$20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$$

Como  $p$  y  $q$  son primos entre sí, ambos tienen que contener todas las potencias de alguno de los primos que intervienen en la descomposición. Así pues, si los 8 factores los dividimos en dos partes, una será el numerador (la parte menor) y la otra el denominador. Por tanto, el número de fracciones es igual al total de maneras de dividir un conjunto de 8 elementos en dos partes. Esto es igual a

$$\frac{1}{2} \left[ \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} \right] = \frac{2^8}{2} = 128,$$

donde hemos tenido en cuenta el resultado del apartado b) del problema anterior. Por otra parte, notemos que si tomamos un conjunto de  $k$  elementos, llamémosle  $A$ , el restante es uno de  $8 - k$  elementos, que llamamos  $B$ . Ahora bien, la partición  $(A, B)$ , contada en el sumando  $\binom{8}{k}$ , es la misma que la partición  $(B, A)$ , contada en el sumando  $\binom{8}{8-k}$  y de ahí el factor  $1/2$  en la expresión anterior.

- 60.** ¿De cuántas maneras se pueden elegir 5 números entre 1 y 18 de manera que cada dos de ellos difieran en al menos 2 unidades?

*Solución.*

Sean los números elegidos  $a, b, c, d, e$  y consideremos los números que no han sido elegidos antes de  $a$ , que llamamos  $x_1$ , entre  $a$  y  $b$ , que llamamos  $x_2$ , entre  $b$  y  $c$ , que llamamos  $x_3$ , etcétera, hasta los que no han sido elegidos después de  $e$ , que llamamos  $x_6$ . Como en total hemos dejado de elegir 13 números, se debe cumplir

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 13,$$

con  $x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 1$ . Tomando  $y_j = x_j - 1$  con  $j = 2, 3, 4, 5$ , la ecuación anterior se escribe

$$x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + x_6 = 9.$$

El número de soluciones no negativas de esta ecuación nos dará el resultado que buscamos. Ahora bien, esto es igual a  $\binom{14}{5} = 2002$ .

Para calcular el número de soluciones de una ecuación de la forma

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m,$$

con  $x_j \geq 0$ , escribimos  $m$  unos separados por  $n - 1$  ceros. Todos los unos que haya antes del primer 0 nos dan el valor de  $x_1$ , los unos entre el primer y segundo cero, el de  $x_2$  y así hasta tener todos los unos a la derecha del último cero, que nos dará el valor de  $x_n$ . Como tenemos una cadena de  $m + n - 1$  caracteres de ceros y unos, con  $n - 1$  ceros y  $m$  unos, el total de cadenas que podemos formar es equivalente al total de maneras de elegir las  $n - 1$  posiciones de los ceros entre el total de  $m + n - 1$  posiciones. Esto es  $\binom{m+n-1}{n-1} = \binom{m+n-1}{m}$ .

61. ¿Cuántos subconjuntos del conjunto  $\{1, 2, \dots, 9\}$  no contienen dos números consecutivos?

*Solución.*

El problema es muy similar al anterior, solo que ahora el número de elementos que elegimos es variable. Supongamos que hemos elegido  $k$  números, entonces antes del primero hemos dejado de elegir  $x_1$  elementos,  $x_2$  entre el primero y el segundo y, así sucesivamente, hasta dejar de haber elegido  $x_{k+1}$  tras el último de ellos. Como hemos dejado de elegir  $9 - k$  elementos, se debe cumplir

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = 9 - k,$$

con  $x_2, \dots, x_k \geq 1$ , ya que no puede haber números consecutivos. Si  $y_j = x_j - 1$ , para  $j = 2, \dots, k$ , entonces

$$x_1 + y_2 + \dots + y_k + x_{k+1} = 10 - 2k,$$

donde todos los sumandos en la parte izquierda de la igualdad son números mayores o iguales que 0. Con esto, es evidente que  $0 \leq k \leq 5$ . Resolviendo cada caso, resulta que el total de subconjuntos buscado es igual a

$$\binom{10}{0} + \binom{9}{1} + \binom{8}{2} + \binom{7}{3} + \binom{6}{4} + \binom{5}{5} = 89.$$

62. Ana va escribiendo en un folio en blanco una cadena de números, que elige aleatoriamente entre el 0, el 2 y el 5, hasta que la cadena termine en 2025. ¿Cuál es la probabilidad de que acabe antes de escribir el noveno número?

*Solución.*

Notemos que la probabilidad de que una cadena termine en 2025, con independencia de su longitud, es igual a  $1/3^4$ . Ahora, la probabilidad de que Ana termine, tras escribir  $n$  dígitos, es igual a la probabilidad de que los últimos 4 dígitos sean 2025, pero que las cadenas de  $n - 1$ ,  $n - 2$ ,  $n - 3$  dígitos no acabe ninguna en 2025. Con esto, tenemos que terminar después de escribir el cuarto, quinto, sexto y séptimo dígito es igual a  $1/3^4$ , mientras que acabar tras escribir el octavo dígito requiere contar todas las cadenas de 8 números que acaban en 2025, pero que no contienen antes el 2025. Estas son  $2^4 - 1$ . Por tanto, la probabilidad pedida es

$$\frac{4}{3^4} + \frac{3^4 - 1}{3^8} = \frac{5 \cdot 3^4 - 1}{3^8} = \frac{404}{6561}.$$

63. Encuentra todos los números  $n$ , enteros positivos menores que 10000, tales que su consecutivo,  $n + 1$ , tenga más cuatros que  $n$  entre sus dígitos. Por ejemplo, el 43 es uno de tales números, ya que 44 tiene un cuatro más.

*Solución.*

La única forma de que aumente el número de cuatros, si al sumar uno no hay *llevada*, es que el número acabe en 3. Y, si hay *llevada*, debería acabar en 39, 399 o 3999. Así, debemos contar los números menores que 1000 acabados en 3, 39, 399 y 3999. Acabados

en 3 hay 1000, acabados en 39 hay 100, acabados en 399 hay 10 y acabdos en 3999 uno. Por tanto el total de números que cumplen la condición es igual a

$$1000 + 10010 + 1 = 1111.$$

- 64.** En cada casilla de un tablero  $4 \times 4$  se escribe 1 o  $-1$ . ¿De cuántas maneras se puede rellenar el tablero si la suma en cada fila y en cada columna debe ser 0?

*Solución.*

Notemos que en cada fila, y en cada columna, hay dos unos y dos menos unos. Si rellenamos el tablero por filas, la primera de ellas puede elgirse de manera arbitraria, es decir de  $\binom{4}{2} = 6$  formas diferentes. Lo mismo sucede para la segunda fila. Ahora bien, una vez escrita la primera fila, de las 6 posibles segundas filas una de ellas coincide con la primera, otra no coincide en ninguna de las entradas y las otras cuatro coinciden exactamente en 2 (notar que no es posible que haya una o tres coincidencias y que si hay 2 coindidencias una es un uno y la otra un menos uno).

Pasemos ahora a rellenar la tercera fila. Si hay una coincidencia entre la primera y la segunda fila, en esa columna la suma vale 2 o  $-2$ , lo que determina el valor de la tercera fila en esa columna. Si no hay coincidencia, la suma vale 0 y hay arbitrariedad de elegir uno o menos uno. Así, en el caso en que no haya ninguna coincidencia en las dos primeras filas, la tercera fila se puede rellenar de 6 formas diferentes. Si hay dos coincidencias entre la primera y segunda fila, podemos rellenar la tercera de dos formas diferentes. Por último, si las dos primeras filas son iguales, la tercera queda determinada de manera única.

Una vez rellenadas las tres primeras filas, la cuarta solo admite una posibilidad, por lo que el total de maneras de rellenar el tablero es igual a

$$6 \cdot (1 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 90.$$

- 65.** Un cuadrado de dimensiones  $(n - 1) \times (n - 1)$  se divide en  $(n - 1)^2$  cuadrados de lado unidad, mediante rectas paralelas a los lados. Cada uno de los  $n^2$  vértices se colorea de rojo o de verde. Calcula el total de coloraciones de los vértices, de manera que cada cuadrado de lado unidad tenga exactamente dos vértices de color rojo.

*Solución.*

Vamos a ver que, una vez coloreados los vértices de la primera fila, el resto vértices queda condicionado por esta coloración inicial. Para ello, distinguiremos dos situaciones, que en la coloración de la primera fila haya al menos dos vértices adyacentes del mismo color o que no los haya.

Si hay dos vértices adyacentes del mismo color, eso determina de manera única el color de los otros dos vértices que completan el cuadrado en la fila inferior, que también tendrán el mismo color. Pero, al fijar el color de estos dos vértices, sus adyacentes también tendrán fijado el color, ya que tendremos un cuadrado con tres vértices coloreados, lo que determina el color del cuarto vértice. De este modo, la segunda fila queda determinada de manera única. Pero como en esta fila también hay dos vértices adyacentes del mismo color, la

coloración de la tercera fila queda completamente determinada y así sucesivamente. Es decir, si en la primera fila hay dos vértices adyacentes del mismo color, el color del resto de vértices está completamente determinado. El total de maneras de colorear la primera fila es  $2^n$ , pues hay  $n$  vértices y cada uno de ellos se puede colorear de rojo o de verde. De todas estas coloraciones solo hay dos que no tienen vértices adyacentes del mismo color, que son las coloraciones que alternan rojo-verde o verde-rojo. Esto nos da  $2^n - 2$  posibles coloraciones.

Si los vértices de la primera fila alternan el color, los de la segunda también deben hacerlo, lo mismo que los de la tercera, cuarta, quinta, etc. Como hay dos coloraciones que alternan el color y hay  $n$  filas, en total hay  $2^n$  coloraciones en las que los vértices alternan el color.

En resumen, el total de coloraciones es igual a

$$2^n - 2 + 2^n = 2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1).$$