Seminario de problemas Curso 2023-24. Hoja 8

Los problemas de esta hoja se resuelven aplicando el principio de inducción matemática.

70. Prueba que la ecuación $x^2 + y^2 = z^n$ tiene soluciones enteras positivas (x, y, z) para todo valor de $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Solución

Es evidente que si $n = 1$ o $n = 2$ existe solución. Por ejemplo, para $n = 1$ una solución es $(1, 1, 2)$ y, para $n = 2$, es solución cualquier terna pitagórica, como $(3, 4, 5)$. Supongamos ahora que conocemos una solución (x, y, z) para $n = k$. Entonces, (zx, zy, z) es una solución para $n = k + 2$. En efecto,

$$(zx)^2 + (zy)^2 = z^2(x^2 + y^2) = z^2 z^k = z^{k+2}.$$

Por el principio de inducción, como hay solución para $n = 1$ y $n = 2$ y si la hay para $n = k$ también la hay para $n = k + 2$, hay solución para todo $n \geq 1$.

71. Prueba que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

Solución

Veamos que la fórmula es cierta para $n = 1$. En este caso, el miembro de la izquierda se deruce a $1 \cdot 1! = 1$ y el de la derecha a $(1 + 1)! - 1 = 1$, lo que nos dice que la fórmula es cierta para $n = 1$.

Supongamos que la fórmula es cierta para $n = k$, es decir, asumimos que

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! = (k + 1)! - 1.$$

Queremos ver que, entonces, la fórmula también es cierta para $n = k + 1$, es decir

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! + (k + 1) \cdot (k + 1)! = (k + 2)! - 1.$$

Ahora bien, por la suposición que hemos hecho

$$\underbrace{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k!} + (k + 1) \cdot (k + 1)! = (k + 1)! - 1 + (k + 1) \cdot (k + 1)!.$$

Sacando factor común a $(k + 1)!$ en la expresión anterior, tenemos que

$$(k + 1)! - 1 + (k + 1) \cdot (k + 1)! = (k + 2)(k + 1)! - 1 = (k + 2)! - 1.$$

Por tanto, por el principio de inducción, la fórmula es cierta para todo $n \geq 1$.

72. Demuestra que $1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \cdots + 1/\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n}$.

Solución

Es evidente que la desigualdad se cumple para $n = 1$, ya que $1 \leq 2\sqrt{1}$. Supongamos que la desigualdad es cierta para $n = k$, es decir,

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k}.$$

Si probamos que, entonces, la desigualdad también se cumple para $n = k+1$, habremos probado que se cumple para todo $n \geq 1$. Ahora bien, por la hipótesis de inducción,

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Si probamos que

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1},$$

habremos completado la prueba. Multiplicando por $\sqrt{k+1}$, resulta

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1} \iff 2\sqrt{k^2+k} + 1 \leq 2k+2 \iff 2\sqrt{k^2+k} \leq 2k+1.$$

Elevando al cuadrado, esto es equivalente a $0 \leq 1$, que claramente es cierto. Por tanto, concluimos que la desigualdad se cumple para todo $n \geq 1$.

73. Demuestra que $1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \cdots + 1/\sqrt{2n} > \sqrt{n}$.

Solución

Empezamos viendo que la desigualdad se cumple para $n = 1$. En efecto, es inmediato ve que

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{1} = 1.$$

Suponemos, ahora, que la desigualdad se cumple para $n = k$, es decir

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2k}} > \sqrt{k},$$

y queremos ver que, entonces, también es cierta para $n = k+1$. Haciendo uso de la hiópesis de inducción,

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2k}} + \frac{1}{\sqrt{2k+1}} + \frac{1}{\sqrt{2(k+1)}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{2k+1}} + \frac{1}{\sqrt{2(k+1)}}.$$

Por otra parte,

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{2k+1}} + \frac{1}{\sqrt{2(k+1)}} > \sqrt{k} + \frac{2}{\sqrt{2(k+1)}}.$$

Si vemos que

$$\sqrt{k} + \frac{2}{\sqrt{2(k+1)}} > \sqrt{k+1},$$

habremos probado el paso inductivo y, por tanto, que la desigualdad es cierta para todo $n \geq 1$. Ahora bien,

$$\sqrt{k} + \frac{2}{\sqrt{2(k+1)}} > \sqrt{k+1} \iff \sqrt{2k(k+1)} + 2 > \sqrt{2}(k+1) \iff \sqrt{2k(k+1)} > \sqrt{2}(k+1) - 2.$$

Elevando al cuadrado

$$2k^2 + 2k > 2k^2 + 4k - 4\sqrt{2}k + 6 - 4\sqrt{2} \iff 6 - 4\sqrt{2} + (2 - 4\sqrt{2})k < 0.$$

Pero esta desigualdad es cierta para todo $k \geq 1$. Por tanto, la desigualdad inicial es cierta para todo $n \geq 1$.

74. Demuestra que $2!\,4!\cdots(2n)! \geq ((n+1)!)^n$.

Solución

Para $n=1$ la desigualdad es cierta, ya que $2! \geq (2!)^1$. Supongamos que la desigualdad es cierta para $n=k$ y veamos que, entonces, también lo es para $n=k+1$.

$$2!\,4!\cdots(2k)!(2k+2)! \geq ((k+1)!)^k(2k+2)!,$$

donde hemos aplicado la hipótesis inductiva. A continuación probaremos que

$$((k+1)!)^k(2k+2)! \geq ((k+2)!)^{k+1} = ((k+2)(k+1)!)^{k+1} = (k+2)^{k+1}((k+1)!)^{k+1}.$$

Cancelando las potencias de $(k+1)!$, la desigualdad anterior es equivalente a

$$(2k+2)! \geq (k+2)^{k+1}(k+1)! \iff \frac{(2k+2)!}{(k+2)^{k+1}(k+1)!} \geq 1.$$

Desarrollando el factorial del numerador y simplificando, resulta

$$\frac{(2k+2)\cdot(2k+1)\cdots(k+3)\cdot(k+2)}{(k+2)^{k+1}} \geq 1.$$

Como cada uno de los $k+1$ factores del numerador es mayor o igual que $k+2$, la desigualdad es claramente cierta y hemos concluido.

75. Demuestra que, para todo $0 \leq x \leq \pi$, se verifica $|\operatorname{sen} nx| \leq n \operatorname{sen} x$, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

Solución

Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} x \geq 0$ para $0 \leq x \leq \pi$, la desigualdad es claramente cierta para $n=1$, ya que $|\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x$. Asumiendo que la desigualdad es cierta para $n=k$, veamos que también lo es para $n=k+1$. Para ello, usamos la fórmula del seno de la suma

$$\operatorname{sen}(k+1)x = \operatorname{sen} kx \cos x + \cos kx \operatorname{sen} x.$$

Tomando valores absolutos y, aplicando la desigualdad triangular,

$$|\operatorname{sen}(k+1)x| \leq |\operatorname{sen} kx||\cos x| + |\cos kx||\operatorname{sen} x|.$$

Aplicando la hipótesis de inducción ($|\operatorname{sen} kx| \leq k \operatorname{sen} x$) y que $|\cos\theta| \leq 1$ ($\theta \in \mathbb{R}$), resulta

$$|\operatorname{sen}(k+1)x| \leq |\operatorname{sen} kx||\cos x| + |\cos kx||\operatorname{sen} x| \leq k \operatorname{sen} kx + \operatorname{sen} x = (k+1)\operatorname{sen} x.$$

Por el principio de inducción, la desigualdad queda probada para todo $n \in \mathbb{N}$.

76. Prueba que, para todo número natural $n > 4$, se verifican las siguientes desigualdades:

$$2^n > 2n + 1; \qquad 2^n > n^2.$$

Solución

En realidad, basta con probar la segunda desigualdad, ya que $n^2 > 2n + 1$ para todo $n > 4$. Esto es fácil de comprobar, pues

$$n^2 > 2n + 1 \iff n^2 - 2n - 1 > 0 \iff (n-1)^2 - 2 > 0.$$

Ahora bien, para $n = 5$, la desigualdad se cumple, ya que $2^5 > 5^2$. Suponiendo que se cumple para $n = k$, demostraremos que se cumple para $n = k+1$, es decir $2^{k+1} > (k+1)^2$. Como hemos supuesto $2^k > k^2$, resulta

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 > (k+1)^2 \iff 2k^2 - (k+1)^2 > 0.$$

Esta última desigualdad es equivalente a

$$k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2 > 0$$

que ya hemos visto que es cierta para cualquier $k > 4$. Así, por el principio de inducción, las dos desigualdades se cumplen si $n > 4$.

77. Prueba que, para todo número entero $n \geq 0$, $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ es divisible por 133.

Solución

Cuando $n = 0$, $11^2 + 12 = 133$, es múltiplo de 133. Supongamos que $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ es divisible por 133 y veamos que el siguiente número de esta forma también lo es.

$$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} = 11\left(11^{k+2} + 12^{2k+1}\right) + (12^2 - 11)12^{2k+1}.$$

El primer sumando, $11^{k+2} + 12^{2k+1}$, es múltiplo de 133, por hipótesis de inducción y el segundo sumando también es múltiplo de 133, ya que $12^2 - 11 = 133$. Como la suma de múltiplos de 133 también es mútiplo de 133, resulta que $11^{k+3} + 12^{2k+3}$ es múltiplo de 133. Así, por el principio de inducción, $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ es divisible por 133 para todo $n \geq 0$.

Tambbién puede resolverse este problema mediante congruencias módulo 133. En efecto,

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot \left(12^2\right)^n.$$

Teniendo en cuenta que $12^2 = 144 \equiv 11 \pmod{133}$, resulta

$$11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot \left(12^2\right)^n \equiv 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 11^n = 133 \cdot 11^n \equiv 0 \pmod{133}.$$

78. Prueba que $n^4/2 + n^3/3 + n^2/2 - n/3$ es un entero positivo para todo $n \geq 1$.

Solución

Para $n = 1$ la expresión dada es igual a

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1,$$

que es un entero positivo. Supongamos que para $n = k$ la expresión es también un entero positivo, es decir $k^4/2 + k^3/3 + k^2/2 - k/3$ es un entero positivo. Para $n = k + 1$, la expresión tiene la forma

$$\frac{(k+1)^4}{2} + \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{(k+1)^2}{2} - \frac{k+1}{3}.$$

Desarrollando los binomios, se tiene

$$\frac{k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}{2} + \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} + \frac{k^2 + 2k + 1}{2} - \frac{k+1}{3} =$$
$$= \left(\frac{k^4}{2} + \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} - \frac{k}{3}\right) + (2k^3 + 3k^2 + 2k) + (k^2 + k) + k + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right).$$

El primer sumando es un entero positivo por hipótesis de inducción y el resto, también son enteros positivos, por lo que toda la expresión es un entero positivo. De este modo concluimos, por el principio de inducción, que $n^4/2 + n^3/3 + n^2/2 - n/3$ es un entero positivo para todo $n \geq 1$.

Procediendo de otra forma, reduciendo a común denominador, se obtiene

$$\frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{3} = \frac{(3n^3 + 2n^2 + 3n - 2)n}{6}.$$

Ahora bien, es eviente que $3n^3 + 2n^2 + 3n - 2$ es par, cualquiera que sea n, y también mútiplo de 3 (basta considerar la expresión módulo 3). Por tanto, es múltiplo de 6 y el cociente es un número entero y además positivo.

79. Prueba que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un número de n dígitos que es divisible por 5^n y su expresión decimal contiene sólo los dígitos 5, 6, 7, 8 y 9.

Solución

Si empezamos por los números de 1, 2 y 3 cifras, vemos que son múltiplos de 5, 25 y 125, respectivamente, los números

$$5, \quad 75, \quad 875.$$

A priori, no parece haber un patrón en ellos, pero no es así, ya que 75 se ha formado añadiendo un 7 delante del 5 y 875 añadiendo un 8 delante del 75. Así, pues, conjeturamos que, dado un número a_k de k cifras que es múltiplo de 5^k, podemos construir otro, múltiplo de 5^{k+1}, añadiendo delante del mismo uno de los dígitos 5, 6, 7, 8, 9. Si este nuevo número es a_{k+1}, entonces, según la construcción que hemos propuesto,

$$a_{k+1} = a_k + p10^k, \qquad p = 5, 6, 7, 8, 9.$$

Puesto que, por hipótesis, a_k es múltiplo de 5^k, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $a_k = q \cdot 5^k$. Por tanto,

$$a_{k+1} = 5^k(q + p \cdot 2^k).$$

Ahora, basta elegir p adecuadamente para que $q + p \cdot 2^k$ sea múltiplo de 5 o, lo que es lo mismo, $q + p \cdot 2^k \equiv 0 \pmod 5$. Esto puede hacerse siempre, ya que 2 y 5 son primos entre sí y, entonces, 2^k tiene inverso módulo 5, es decir, existe b_k tal que $2^k b_k \equiv 1 \mod 5$. De este modo,

$$q + p \cdot 2^k \equiv 0 \mod 5 \Rightarrow q b_k + p \equiv 0 \mod 5.$$

Como $5, 6, 7, 8, 9 \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \mod 5$, podemos asegurar que la ecuación anterior siempre tiene solución. Así, hemos probado que siempre podemos encontrar un número de n cifras que es divisible por 5^n y su expresión decimal contiene sólo los dígitos 5, 6, 7, 8 y 9.

80. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que verifican

1. $f(1) = 2$.
2. $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$.

Solución

Tomemos $y = 1$, entonces,

$$f(x) = 2f(x) - f(x+1) + 1 \Rightarrow f(x+1) = f(x) + 1,$$

cualqueira que sea $x \in \mathbb{Q}$. De aquí se deduce, por un lado que, dado que $f(1) = 2$, $f(n) = n + 1$ para $n \in \mathbb{Z}$. Por otra parte, aplicando reiteradamente $f(x+1) = f(x) + 1$, resulta

$$f(x+k) = f(x) + k, \quad x \in \mathbb{Q},\ k \in \mathbb{Z}.$$

A partir de aquí, veamos que $f(x) = x + 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Para ello, sea $x = p/q$ una fracción irreducible con $q > 0$ y hagamos $y = q$. Entonces,

$$f(p) = f(p/q)f(q) - f(p/q + q) + 1.$$

Como $p, q \in \mathbb{Z}$, $f(p) = p + 1$, $f(q) = q + 1$. Por otra parte, $f(p/q + q) = p/q + q$. Por tanto,

$$p + 1 = (q+1)f(p/q) - f(p/q) - q + 1 \Rightarrow qf(p/q) = p + q \Rightarrow f(p/q) = p/q + 1.$$

Es decir, $f(x) = x + 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

81. Prueba que, para todo ángulo θ y para todo número entero $n \geq 0$, se verifica la igualdad

$$\cos\theta \cos 2\theta \cos 4\theta \cdots \cos 2^n\theta = \frac{\operatorname{sen} 2^{n+1}\theta}{2^{n+1} \operatorname{sen}\theta}.$$

Solución

La igualdad es cierta para $n = 0$. En efecto, haciendo uso de la fórmula del seno del ángulo doble,

$$\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2 \operatorname{sen}\theta} = \frac{2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{2 \operatorname{sen}\theta} = \cos\theta.$$

Supongamos que es cierta para $n = k$ y veamos que es cierta para $n = k + 1$.

$$\underbrace{\cos\theta \cos 2\theta \cos 4\theta \cdots \cos 2^k\theta} \cos 2^{k+1}\theta = \frac{\operatorname{sen} 2^{k+1}\theta}{2^{k+1} \operatorname{sen}\theta} \cos 2^{k+1}\theta.$$

Multiplicando y dividiendo por 2, resulta

$$\frac{2\operatorname{sen} 2^{k+1}\theta \cos 2^{k+1}\theta}{2^{k+2}\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen} 2^{k+2}\theta}{2^{k+2}\operatorname{sen}\theta},$$

y la igualdad es cierta para $n = k + 1$. Por el principio de inducción, la igualdad es cierta para todo $n \geq 0$.