Seminario de problemas Curso 2022-23. Hoja 8

57. ¿Cuántos números hay entre 1 y 300 que no sean múltiplos ni de 2, ni de 3, ni de 5?
Solución.
Para calcular esto primero vamos a calcular cuántos de esos números son múltiplos de alguno de los número $2, 3$ o 5 aplicando el principio de inclusión y exclusión, y entonces los números que nos interesan serán los que no hemos contado. Para aplicar el principio

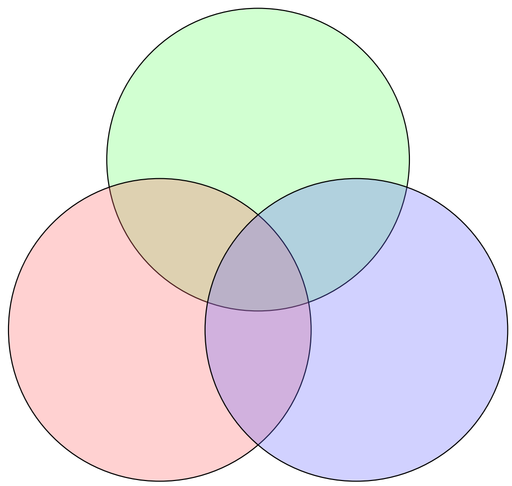


Figura 1: Principio de inclusión-exclusión

de inclusión y exclusión primero sumamos todos los múltiplos de 2, los de 3 y los de 5, pero de esta forma hemos contado dos veces los múltiplos de 6, los múltiplos de 10 y los múltiplos de 15, por lo tanto se los quitamos al total calculado, pero ahora, en el primer conteo habíamos contado 3 veces los múltiplos de 30 pero al hacer la resta también los hemos quitado 3 veces, por lo tanto los tenemos que volver a añadir. Por lo tanto el total de múltiplo de $2, 3$ o 5 será

Múlt. de 2+Múlt. de 3+Múlt. de 5−Múlt. de 6−Múlt. de 10−Múlt. de 15+Múlt. de 30.

Calculemos ahora estos valores. La mitad de los números son múltiplos de 2, ese decir $300/2 = 150$, un tercio de ellos lo son de 3, es decir, $300/3 = 100, \ldots$. Continuando así el resultado será

$$\frac{300}{2} + \frac{300}{3} + \frac{300}{5} - \frac{300}{6} - \frac{300}{10} - \frac{300}{15} + \frac{300}{30} = 150 + 100 + 60 - 50 - 30 - 20 + 10 = 220.$$

Entonces, la cantidad de números que NO son múltiplos ni de 2, ni de 3 ni de 5, es $300 - 220 = 80$.

58. Elegimos dos números al azar (se permite repetición) del conjunto $\{1, 2, \ldots, N\}$. Demostrar que la probabilidad de que la suma sea par es mayor o igual que la probabilidad de que la suma sea impar.

Solución.
Recordemos que la suma de dos números es par solo cuando ambos números son pares o impares a la vez, y es impar si un número es par y el otro impar. Vamos a considerar dos casos.

- N es un número par, es decir $N = 2k$, entonces hay k números impares y k números pares. Para calcular la probabilidad de que la suma sea par calculamos la probabilidad de que ambos números sean pares y le sumamos la probabilidad de que ambos sean impares, resultando
$$\frac{k}{2k}\frac{k}{2k} + \frac{k}{2k}\frac{k}{2k} = \frac{1}{2}.$$
Calculamos ahora la probabilidad de que la suma sea impar, para ello calculamos la probabilidad de que el primer número sea par y el segundo impar y le sumamos la probabilidad de que el primer número sea impar y el segundo par, en este caso coincide con la probabilidad anterior
$$\frac{k}{2k}\frac{k}{2k} + \frac{k}{2k}\frac{k}{2k} = \frac{1}{2}.$$
Por lo tanto $P(\text{Suma par}) = 1/2 = P(\text{Suma impar})$.
- Si N es un número impar, digamos $N = 2k+1$, con $k \geq 0$. En este caso tendremos k números pares y $k+1$ impares. Calculamos las probabilidad de que la suma sea par como en el apartado anterior
$$P(\text{Suma par}) = \frac{k}{2k+1}\frac{k}{2k+1} + \frac{k+1}{2k+1}\frac{k+1}{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)^2}(k^2 + (k+1)^2).$$
Y de forma similar calculamos la probabilidad de que la suma sea impar
$$P(\text{Suma impar}) = \frac{k}{2k+1}\frac{k+1}{2k+1} + \frac{k+1}{2k+1}\frac{k}{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)^2}2k(k+1).$$
Para concluir el ejercicio solo tenemos que ver que $k^2 + (k+1)^2 \geq 2k(k+1)$, pero esto no es más que una aplicación de la desigualdad $x^2 + y^2 \geq 2xy$ para cualquiera $x, y \in \mathbb{R}$. Para ver porque esta desigualdad es cierta basta con considerar la identidad notable $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$ ya que
$$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

59. Di cuáles son todas las parejas de números de la forma $2^n 3^m$, $n, m \geq 0$ y valores enteros, cuya diferencia sea 1. Por ejemplo $(1, 2)$ y $(2, 3)$ son parejas de esa forma.

Solución.
Lo primero que conviene notar es que si x e y son números distintos de la forma $2^n 3^m$ y los dos son múltiplos de 2, entonces su diferencia será un múltiplo de 2 mayor o igual que 2 y si los dos son múltiplos de 3, su diferencia será un múltiplo de 3 mayor o igual a 3. Por lo tanto a partir de aquí asumimos que un número es una potencia de 2, es decir, $x = 2^n$, y el otro una potencia de 3, es decir, $y = 3^m$.

Es fácil hacer este ejercicio si trabajamos módulo 8. Así tendremos que
$$2^n \equiv \begin{cases} 1 \pmod{8} & \text{si } n = 0, \\ 2 \pmod{8} & \text{si } n = 1, \\ 4 \pmod{8} & \text{si } n = 2, \\ 0 \pmod{8} & \text{si } n \geq 3. \end{cases} \qquad 3^m \equiv \begin{cases} 1 \pmod{8} & \text{si } m \text{ par}, \\ 3 \pmod{8} & \text{si } m \text{ impar}. \end{cases}$$

Distingamos ahora 3 casos.

1. Si $y = 3^m < x = 2^n$, entonces como queremos que $x - y = 1$, esta igualdad también debe ser cierta en módulo 8. Como $y = 3^m$ solo puede ser 1 o 3 módulo 8, necesitamos que x sea 2 o 4 módulo 8. Tenemos que $x = 2^n \equiv 2 \pmod 8$ solo se cumple cuando $x = 2$, y en este caso tenemos que $y = x - 1 = 1$, obtenemos así el par $(1, 2)$. Para el otro caso tenemos que $x = 2^n \equiv 4 \pmod 8$ cuando $n = 2$ obtenemos $x = 4$ e $y = x - 1 = 3$, obteniendo un segundo par $(3, 4)$.
2. Si $y > x$ y además $y \equiv 3 \pmod 8$, en este caso necesitaremos que $x \equiv 2 \pmod 8$, y esto solo ocurre cuando $x = 2$, entonces tendremos que $y = x + 1 = 3$. Este par es $(2, 3)$.
3. Si $y > x$ y además $y \equiv 1 \pmod 8$. En este caso solo sabemos que la potencia de $y = 3^m$ debe ser par, es decir $m = 2k$, y que para $x = 2^n$ tiene que ser $n \geq 3$. Haciendo algunas pruebas es fácil ver que $(8, 9)$ es un par, veamos que no hay ninguno más. Para ello, como $m = 2k$ y teniendo en cuanta que $x = y - 1$, tenemos que

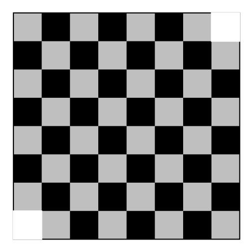
$$x = 3^m - 1 = 3^{2k} = (1 - 3^k)(1 + 3^k).$$

Como x es una potencia de 2, también lo son sus factores, por lo tanto $1 - 3^k$ y $1 + 3^k$ son potencias de 2 que solo difieren en 2, la única opción posible es que sean 2 y 4, esto nos dice que la única opción para x es $x = 2 \cdot 4 = 8$, y por lo tanto $y = x + 1 = 9$.

Podemos concluir este ejercicio diciendo que los únicos pares como los que pide el enunciado que existen son

$$(3^0, 2^1) = (1, 2),\ (2^1, 3^1) = (2, 3),\ (3^1, 2^2) = (3, 4) \text{ y } (2^3, 3^2) = (8, 9).$$

60. Sabemos que es posible cubrir un tablero de ajedrez con 32 fichas de domino de modo que cada ficha cubra dos casillas. ¿Es posible hacer lo mismo con un tablero de ajedrez al cual le hemos quitado las dos esquinas negras?



Solución.
La clave de este problema es darse cuenta que cada ficha de dominó debe tapar una casilla blanca y una negra. Si quitamos las dos esquinas negras del tablero, nos quedamos solo con 62 casillas, para cubrirlo necesitaremos 31 fichas y por lo tanto el tablero debería tener 31 casillas blancas y otras 31 negras, pero al quitar solo las negras no quedan 32 blancas y 30 negras, lo que hace que sea imposible cubrirlo.

61. Sean α y β las soluciones de la ecuación cuadrática

$$(x - 2)(x - 3) + (x - 3)(x + 1) + (x + 1)(x - 2) = 0.$$

Calcula

$$\frac{1}{(\alpha + 1)(\beta + 1)} + \frac{1}{(\alpha - 2)(\beta - 2)} + \frac{1}{(\alpha - 3)(\beta - 3)}.$$

Solución.
Para una primera solución podemos empezar desarrollando el polinomio, el resultado es

$$3x^2 - 8x + 1 = 0.$$

Lo transformamos en un polinomio mónico para aplicar las identidades de Cardano-Vieta. Es decir, consideramos el polinomio

$$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{1}{8},$$

que tiene las mismas raíces que las soluciones de la ecuación original. Las identidades de Cardano-Vieta nos dan las igualdades

$$\alpha\beta = \frac{1}{8}, \quad \alpha + \beta = \frac{8}{3}.$$

Ahora bien, los denominadores de la expresión a evaluar son todos de la forma

$$(\alpha + n)(\beta + n) = \alpha\beta + n(\alpha + \beta) + n^2 = \frac{1}{3} + \frac{8n}{3} + n^2,$$

por las identidades de Cardano-Vieta. Ahora solo tenemos que calcular estas expresiones para $n = 1, -2, -3$ y sustituir para obtener el resultado.

$$(\alpha+1)(\beta+1) = \frac{1}{3}+\frac{8}{3}+1 = 4,\ (\alpha-2)(\beta-2) = \frac{1}{3}-\frac{16}{3}+4 = -1,\ (\alpha-3)(\beta-3) = \frac{1}{3}-\frac{24}{3}+9 = \frac{4}{3}.$$

Ahora podemos sustituir en la expresión del enunciado y concluir que

$$\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} + \frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)} + \frac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)} = \frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{4} = 0.$$

Hay otra forma de evaluar estas expresiones sin recurrir a las identidades de Cardano-Vieta, para ello hay que tener en cuenta que como α y β son las raíces del polinomio de segundo grado, entonces

$$p(x) = (x-2)(x+3) + (x-3)(x+1) + (x+1)(x-2) = 3(x-\alpha)(x-\beta) = 3(\alpha-x)(\beta-x),$$

de esta forma sabemos que $(\alpha - x)(\beta - x) = p(x)/3$, entonces para calcular la expresión del enunciado podemos hacer

$$\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}+\frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}+\frac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)} = \frac{3}{p(-1)}+\frac{3}{p(2)}+\frac{3}{p(3)} = \frac{3}{12}+\frac{3}{-3}+\frac{3}{4} = 0.$$

62. Determinar el valor exacto de la siguiente suma

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2020\cdot 2021\cdot 2022}.$$

Solución.
Observemos que cada uno de los términos de la suma es de la forma

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)},\ n = 1, 2, 3, \ldots, 2000.$$

Vamos a expresar este cociente como suma de tres fracciones por el procedimiento del cálculo de fracciones simples

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \frac{(A+B+C)n^2 + (3A+2B+3)n + 2A}{n(n+1)(n+2)}.$$

De aquí resultan las siguientes tres ecuaciones

$$A + B + C = 0, \quad 3A + 2B + C = 0, \quad 2A = 1.$$

Resolviendo el sistema resulta $A = 1/2, B = -1, C = 1/2$, de modo que nuestra fracción general la podemos expresar como

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Así nuestra suma original será igual a la siguiente suma telescópica

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2020\cdot 2021\cdot 2022} = \\
&\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) + \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}\right)\right) \\
&-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}\right) + \left(\frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2021} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2022}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2021\cdot 2022}\right) = \frac{1}{2}\frac{2021\cdot 1011 - 1}{2021\cdot 2022} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2043230}{2021\cdot 2022} = \frac{2\cdot 5\cdot 7\cdot 17^2\cdot 101}{2^2\cdot 3\cdot 43\cdot 47\cdot 337} = \frac{5\cdot 7\cdot 17^2\cdot 101}{2\cdot 3\cdot 43\cdot 47\cdot 337} = \frac{1021615}{4086462}.
\end{aligned}$$

Otra identidad para el término general de la suma es

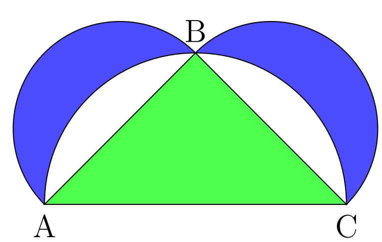
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

A partir de esta identidad obtenemos otra suma telescópica algo más sencilla

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2020\cdot 2021\cdot 2022} = \\
&\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \left(\frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2020\cdot 2021} - \frac{1}{2021\cdot 2022}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2021\cdot 2022}\right),
\end{aligned}$$

esta es la misma solución que hemos obtenido con la otra suma.

63. Sea ΔABC un triángulo rectángulo isósceles con ángulo recto en $\angle ABC$. Lo inscribimos en una semicircunferencia como se ve en la Figura. En el lado AB con centro en su punto medio dibujamos una nueva semicircunferencia exterior al triángulo pasando por A y B. Hacemos lo mismo sobre el lado AC. Si la hipotenusa del triángulo mide 2, ¿cuál es el área de la zona de color azul?



Solución.
Conocemos la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo, y sabemos que es isósceles. Si x es la longitud de los otros lados, usando la identidad de Pitágoras resulta

$$x^2 + x^2 = 2^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \to x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

Sabiendo la longitud de la hipotenusa, podemos calcular el área del semicírculo en el cual está inscrito el triángulo, esta área es

$$\frac{\pi 2^2}{2} = 2\pi.$$

También podemos calcular el área de los semicírculos sobre los lados iguales del triángulo, esta área es:

$$\frac{\pi(\sqrt{2})^2}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Por lo tanto la suma de las áreas de los dos semicírculos sobre los catetos es igual al área del semicírculo grande. Queremos calcular el área pintada en color azul, este área será 2π (la suma de los dos semicírculos pequeños) menos la zona blanca. Por otro lado, el área del triángulo se puede calcular como el área del semicírculo grande, 2π, menos el área en blanco, esto es:

$$A_{\text{azul}} = 2\pi - A_{\text{blanco}} = A_{\text{triángulo}}.$$

Es decir, el área en azul coincide con el área del triángulo, y ya que es un triángulo equilátero y conocemos la longitud de sus catetos esto es fácil de calcular:

$$A_{\text{azul}} = A_{\text{triángulo}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

64. Demostrar la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha).$$

A partir de la identidad anterior, demostrar que $\cos(20°)$ es un número irracional.

Solución.
Para probar esa identidad trigonométrica vamos a tener en cuenta que

$$\cos(3\alpha) = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos(\alpha)\cos(2\alpha) - \sin(\alpha)\sin(2\alpha).$$

Ahora podemos aplicar las identidades para el seno y el coseno del ángulos doble,

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) &= \cos(\alpha)\cos(2\alpha) - \sin(\alpha)\sin(2\alpha) \\
&= \cos(\alpha)(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) - \sin(\alpha)2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
&= \cos^3(\alpha) - \sin^2(\alpha)\cos(\alpha) - 2\sin^2(\alpha)\cos(\alpha) \\
&= \cos^3(\alpha) - 3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha).
\end{aligned}$$

En esta última expresión solo nos aparece el ángulo α, pero nos aparecen senos, podemos transformarlos en cosenos empleando la identidad

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \Rightarrow \sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha).$$

Así obtenemos que

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) &= \cos^3(\alpha) - 3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)\\ &= \cos^3(\alpha) - 3(1-\cos^2(\alpha))\cos(\alpha)\\ &= 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha).\end{aligned}$$

Con esto hemos probado la identidad trigonométrica $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$.

Vamos a emplearla ahora para demostrar que $\cos(20°)$ es un número irracional. Si en la identidad anterior tomamos $\alpha = 20°$, y tenemos en cuenta que $\cos(60°) = 1/2$, resultará que

$$\frac{1}{2} = 4\cos^3(20°) - 3\cos(20°) \Rightarrow ,8\cos^3(20°) - 6\cos(20°) - 1 = 0.$$

Es decir, el número $\cos(20°)$ es raíz del polinomio

$$p(x) = 8x^3 - 6x - 1.$$

Tenemos en cuenta que las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros verifican que su numerador divide al término independiente y su denominador al coeficiente director. En este caso, el numerador debe dividir a 1, y el denominador a 8. Los únicos números racionales de esta forma son

$$\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}.$$

Se pude comprobar que ninguno de estos números es raíz de $p(x)$, de hecho se tiene que

$$p(1) = 1,\ p(-1) = -3, p(1/2) = -3,\ p(-1/2) = 1,$$
$$p(1/4) = -19/8,\ p(-1/4) = 3/8, p(1/8) = -111/64,\ p(-1/8) = -17/64.$$

Con esto vemos que $p(x)$ no tiene ninguna raíz racional, pero $\cos(20°)$ es una de sus raíces, por lo tanto debe de ser un número irracional.