Seminario de problemas Curso 2017-18. Hoja 8

56. Este problema fue resuelto en 1826 por el matemático suizo Jacob Steiner. Consiste en calcular el número máximo de regiones R_n en que queda dividido el plano por n rectas, buscando para ello una recurrencia adecuada para R_n. A continuación calcula cuántas de estas regiones no están acotadas.

Solución. Una par de ayuditas:

1. Para alcanzar este máximo, no puede haber dos rectas paralelas ni tres rectas que sean concurrentes en un punto.
2. Si no hay ninguna recta, $n = 0$, sólo hay una región ($R_0 = 1$). Si hay una recta habrá dos regiones ($R_1 = 2$). Para dos rectas el número de regiones es $R_2 = 4$ y para tres rectas, $R_3 = 7$.

Si la recta n-ésima corta a cada una de las $n-1$ rectas anteriores, dicha recta queda dividida en n segmentos, cada uno de los cuales divide una región existente en dos partes. Por tanto

$$R_n = R_{n-1} + n.$$

Como $R_0 = 1$, podemos encontrar una fórmula explícita para R_n. Veamos dos formas de hacerlo.

1. La primera es usando la recurrencia una y otra vez. En efecto,

$$\begin{aligned} R_n &= R_{n-1} + n \\ &= R_{n-2} + (n-1) + n \\ &= R_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &= \cdots \\ &= R_0 + 1 + 2 + \cdots + n. \end{aligned}$$

   Así

$$R_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 0.$$

2. La segunda consiste en tener en cuenta que la expresión $R_n - R_{n-1} = n$ da lugar a una serie telescópica:

$$R_n - R_0 = \sum_{k=1}^{n} (R_k - R_{k-1}) = 1 + 2 + \cdots + n.$$

   De aquí se obtiene la misma expresión para R_n.

Calculamos ahora el número de regiones no acotadas, que denotamos A_n, con $n \geq 0$. Notemos que $A_0 = 1$, $A_1 = 2$, $A_3 = 6$ ... Usando el razonamiento anterior, vemos que la recta n-ésima incrementa el número de regiones existentes en una cantidad n. De estas regiones, $n-2$ están acotadas y 2 no lo están. Por tanto, $A_n = A_{n-1} + 2$ de donde se deduce de forma inmediata que $A_n = 2n$ para $n \geq 1$.

57. Se quiere recubrir un rectángulo de tamaño $2 \times n$ con baldosas de tamaños 2×2 y 2×1. Encuentra una relación de recurrencia para calcular c_n, el número total de recubrimientos diferentes que pueden hacerse.

Solución. La forma en que se puede encontrar la recurrencia es preguntándose cómo es posible conseguir un recubrimiento de $2 \times n$ a partir de otros más pequeños. Esto se ve bien en la figura 1, donde se observa que, si ya tenemos recubierto $2 \times (n-1)$, añadiendo una baldosa 2×1 recubrimos $2 \times n$. Análogamente, si tenemos recubierto $2 \times (n-2)$, añadiendo dos baldosas 2×1 horizontalmente o una baldosa 2×2 recubrimos $2 \times n$.

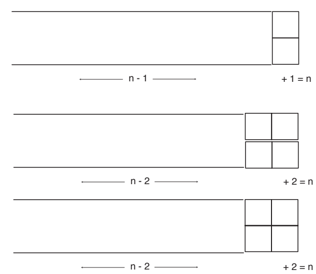


Figura 1: Esquema de la recurrencia.

De esta forma, la recurrencia será

$$c_n = c_{n-1} + 2c_{n-2}.$$

Puesto que la recurrencia es de segundo orden, es necesario conocer los dos primeros términos de la misma. Así, $c_1 = 1$, que es el total de formas en que puede recubrirse un rectángulo 2×1. Del mismo modo, $c_2 = 3$, (dos baldosas 2×1 en horizontal o en vertical o una baldosa 2×2).

Si ahora queremos resolver la recurrencia para encontrar el término general de la misma, buscamos la ecuación característica, que en este caso es $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Las raíces de la misma son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$. Por tanto

$$c_n = A2^n + B(-1)^n,$$

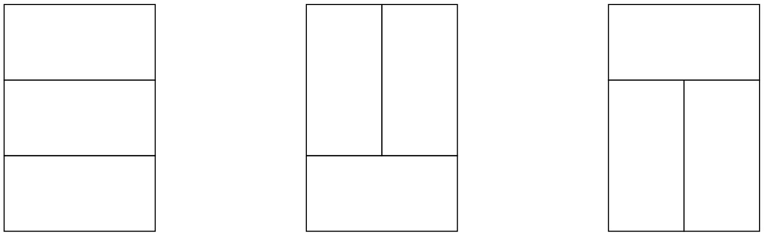
con $c_1 = 1$, $c_2 = 3$. Para obtener A y B debemos resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2A - B = 1 \\ 4A + B = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \frac{2}{3}, \qquad B = \frac{1}{3},$$

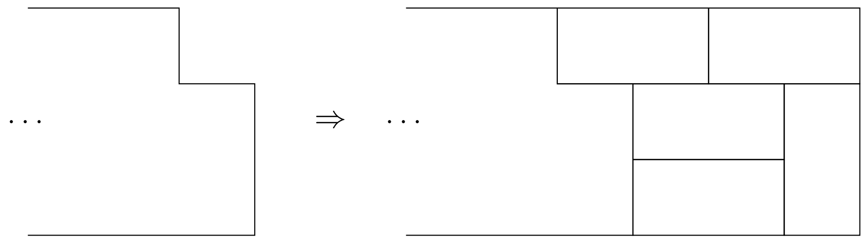
y finalmente $c_n = \left(2^{n+1} + (-1)^n\right)/3$.

58. ¿De cuántas formas se puede cubrir un rectángulo de tamaño $2n \times 3$ con baldosas de tamaño 2×1?

Solución. Denotamos u_n al número de tales recubrimientos. Podemos empezar calculando los casos más sencillos. Así $u_1 = 3$ y $u_2 = 11$. Supongamos que vamos formando los recubrimientos avanzando de izquierda a derecha. Al calcular u_{n+1} se puede apreciar que los cubrimientos $(2n+2) \times 3$ provienen de un cubrimiento $2n \times 3$ al cual se le añade uno de los siguientes bloques



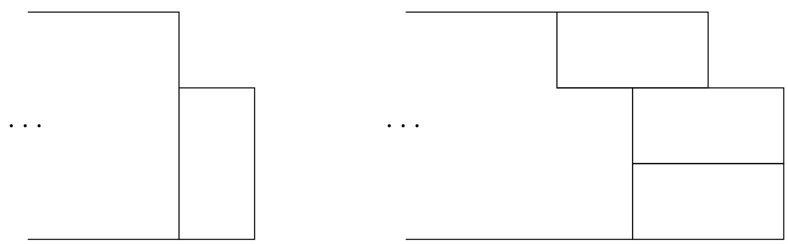
o de un recubrimiento $(2n-1)\times 3$ que tiene un hueco de un cuadrado 1×1 en una de las esquinas de la derecha. Supongamos que el hueco está en la esquina superior derecha. En este último caso, se obtiene el recubrimiento $(2n+2)\times 3$ de manera única como se muestra a continuación:



Análogamente se procedería si el hueco que falta está en la esquina inferior derecha.

Denotamos v_n al número de recubrimientos $(2n-1)\times 3$ que tienen un hueco de un cuadrado 1×1 en la esquina superior derecha. Entonces $u_{n+1} = 3u_n + 2v_n$.

Además, $v_{n+1} = u_n + v_n$, como se aprecia en la siguiente figura:



Operando en el sistema de recurrencias dobles que hemos obtenido, se llega a $u_{n+1} - 2v_{n+1} = u_n$, luego $2v_n = u_n - u_{n-1}$. Así, obtenemos un recurrencia para u_n:

$$u_1 = 3,\ u_2 = 11,\ u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1},\ \ n \geq 2$$

cuya expresión en forma explícita es

$$u_n = A(2-\sqrt{3})^n + B(2+\sqrt{3})^n, \quad n \geq 1.$$

Un truco para simplificar los cálculos a la hora de obtener A y B consiste en extender la sucesión con $u_0 = 1$. En este caso, llegamos al sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A+B & = & 1 \\ A(2-\sqrt{3}) + B(2+\sqrt{3}) & = & 3, \end{array} \right.$$

cuya solución es

$$A = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}, \quad B = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}.$$

Así, la solución de la recurrencia es

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left((\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^n + (\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})^n\right), \quad n \geq 0.$$

Notemos que, a pesar de su apariencia, esta sucesión está formada por números naturales. De hecho, los primeros términos son:

$$\{1, 3, 11, 41, 153, 571, 2131, 7953, 29681, 110771, 413403, \dots\}.$$

59. Encuentra una recurrencia para determinar el total de secuencias formadas con 1, 2 y 3 de forma que detrás de un número no puede haber otro mayor. Resuelve la ecuación recurrente encontrada.

Solución. Consideremos tres tipos diferentes de secuencias:

- 1_n, número de secuencias de longitud n que cumplen la propiedad de que detrás de un número no puede haber otro mayor y que acaban en 1.
- 2_n, lo mismo que la anterior pero acabada en 2.
- 3_n, lo mismo, pero acabada en 3.

Es claro que el total de secuencias a_n que satisfacen la propiedad es igual a $1_n + 2_n + 3_n$.

Supongamos que tenemos construidas todas las secuencias hasta longitud n y queremos construir las de longitud $n+1$. Esto puede hacerse sin más que escribir detrás del último número otro, siempre que esto sea posible. De este modo se tiene

$$\begin{aligned} 1_{n+1} &= 1_n + 2_n + 3_n, \\ 2_{n+1} &= 2_n + 3_n, \\ 3_{n+1} &= 3_n. \end{aligned}$$

Esto puede interpretarse como que detrás de una secuencia que acaba en 3 y de longitud n podemos poner cualquier número (1, 2 ó 3) y obtenemos 3 secuencias diferentes de longitud $n+1$, una acabada en 1, otra en 2 y otra en 3. Si la secuencia acaba en 2, sólo podemos añadir un 1 o un 2, generándose dos secuencias nuevas de longitud $n+1$ acabadas una en 1 y otra en 2. Finalmente, si la secuencia acaba en 1, sólo podemos poner al final otro 1, con lo que generamos una única secuencia de longitud $n+1$ acabada en 1.

Sumando las relaciones anteriores y haciendo alguna manipulación algebraica se obtiene

$$a_{n+1} = 1_{n+1} + 2_{n+1} + 3_{n+1} = 1_n + 2_n + 3_n + 1_n + 2_n + 3_n + 3_n - 1_n = 2a_n + 3_n - 1_n.$$

Notemos que $3_1 = 1$ y, por tanto, $3_n = 1$ para $n \geq 1$. Además, $a_{n-1} = 1_n$. De aquí se deduce una recurrencia del tipo

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1.$$

Para completarla, es preciso dar los tres primeros valores de la misma. En este sentido tenemos

- $a_1 = 3$, ya que hay tres posibles secuencias de longitud uno que cumplen la propiedad: (1, 2, 3).

- $a_2 = 6$, ya que ahora hay seis posibles secuencias de longitud dos: (11, 21, 22, 31, 32, 33)

Para resolver la recurrencia, tenemos en cuenta que la ecuación característica asociada a la parte homogénea $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$ es $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, que tiene una raíz doble en $\lambda = 1$. Por lo tanto

$$a_n^h = A + Bn.$$

Buscamos una solución particular de la recurrencia no homogénea que sea de la forma

$$a_n^p = cn^2,$$

ya que el término independiente es 1, que es una raíz doble de la ecuación característica. Sin más que sustituir se obtiene que $c = 1/2$, por lo que la solución general es

$$a_n = A + Bn + \frac{1}{2}n^2.$$

Como $a_1 = 3$ y $a_2 = 6$, se obtiene el sistema

$$\begin{array}{ll} 3 = a_1 = A + B + \frac{1}{2} & \Longrightarrow A + B = 5/2 \\ 6 = a_2 = A + 2B + 2 \cdot 2^2 & \Longrightarrow A + 2B = 4, \end{array}$$

cuya solución es $A = 1$, $B = 3/2$. En consecuencia,

$$a_n = 1 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2.$$

60. Busca una recurrencia para la siguiente fracción continua y calcula su valor

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

Solución. La fracción continua se puede escribir en forma de la siguiente recurrencia:

$$x_1 = 1; \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

Si esta sucesión tiene un límite L, este debe cumplir que $L^2 - L - 1 = 0$, por lo que hay dos posibilidades,

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Tenemos que probar ahora que, efectivamente, existe dicho límite. A la vista de los primeros términos

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3/2,\ x_4 = 5/3, \ldots$$

podemos conjeturar que se obtiene una sucesión alternante

$$x_1 < x_3 < x_5 \cdots < x_{2n+1} < \cdots \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < \cdots < x_{2n} < \cdots x_6 < x_4 < x_2.$$

Definimos la sucesión de los términos impares, $y_n = x_{2n+1}$, con $n \geq 0$. Se tiene que

$$y_0 = 1, \quad y_{n+1} = 2 - \frac{1}{1 + y_n}, \; n \geq 0.$$

Se puede probar (por inducción) que esta sucesión es creciente y acotada superiormente por $(1+\sqrt{5})/2$. Entonces, por el criterio de Weierstrass, esta sucesión tiene un límite que resulta ser

$$L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Análogamente, se define la la sucesión de los términos pares, $z_n = x_{2n}$, con $n \geq 1$. Se tiene que

$$z_1 = 2, \quad z_{n+1} = 2 - \frac{1}{1 + z_n}, \; n \geq 1.$$

Se puede probar (por inducción) que esta sucesión es decreciente y acotada inferiormente por L, cantidad que resulta ser su límite.

En consecuencia, la sucesión (x_n) también converge a L, que es el valor de la fracción continua definida en el enunciado.

61. Se define la sucesión (a_n) por

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1, \\ a_{n+1} = 1 + a_n a_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Comprueba si a_{2018} es divisible entre 4 o no.

Solución. Si pensamos en la solución módulo 4, vemos que es

$$\{1, 1, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, \dots\}$$

es decir, tiene un periodo de la forma 233, por lo que no contiene ningún 0 y ningún término es divisible entre 4. En particular, a_{2018} no lo es.

62. Se define la siguiente sucesión de forma recurrente:

$$\begin{cases} b_1 = b_2 = 1, \quad b_3 = -1 \\ b_{n+1} = b_n b_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Calcula b_{2018}.

Solución. Por construcción, los términos de la sucesión son productos de 1 y -1, luego $b_n = \pm 1$. Por inspección directa vemos que

$$b_1 = 1,\; b_2 = 1,\; b_3 = -1,\; b_4 = -1,\; b_5 = -1,\; b_6 = 1,\; b_7 = -1,\; b_8 = 1,\; b_9 = 1,\; b_{10} = -1, \dots$$

Así, la sucesión tiene periodo 7. Como $2018 = 7 \times 288 + 2$, $b_{2018} = b_2 = 1$.

63. Tenemos n objetos numerados del 1 al n y n lugares para dejarlos, también numerados del 1 al n. Sea d_n el número de formas que tenemos de dejar los objetos de forma que no haya ninguno en su lugar (a estos números se les denomina *desarreglos* o *desórdenes* de orden n). Encuentra una recurrencia para d_n y obtén su expresión en forma explícita.

Solución. Analizando los primeros casos, vemos que $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ y $d_3 = 2$. Antes de calcular d_4, puede resultar conveniente introducir una notación adecuada para los desarreglos y que nos ayude a la hora de buscar una recurrencia. Usamos la notación de las permutaciones, donde en una matriz $2 \times n$ representamos en la primera fila los objetos y en la segunda la posición que ocupan. Así, los dos desarreglos de orden 3 son

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para buscar los desarreglos de orden 4, pensemos en la imagen del 1, que denotamos $i \in \{2, 3, 4\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Puede ocurrir que la imagen de i sea el 1, lo que daría lugar a d_2 posibles desarreglos (en general d_{n-2}) o que la imagen del i no sea el 1, lo que daría lugar a d_3 posibles desarreglos (en general d_{n-1}). Así, $d_4 = 3(2+1) = 9$ y, en general,

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}), \quad n \geq 3.$$

Hemos obtenido una recurrencia que no tiene los coeficientes constantes, así que no podemos usar la técnica de la ecuación característica. Ahora bien, haciendo el cambio $z_n = d_n - nd_{n-1}$ se obtiene que $z_n = (-1)^n$. Notemos que podemos extender la sucesión a valores $n \geq 0$, haciendo que $d_0 = 1$. Así, tenemos que

$$\begin{cases} d_0 = 1, \\ d_n = nd_{n-1} + (-1)^n, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Sin más que dividir la expresión anterior por $n!$ e introducir el cambio de variable $y_n = d_n/n!$, se llega a

$$y_n - y_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n!},$$

y, por tanto,

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \Rightarrow d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}, \quad n \geq 0.$$