85. Se considera el triángulo de números que vemos al lado, en el que cada número es la suma de tres de los números situados en la fila previa a la suya: el número que tiene encima y los situados inmediatamente a izquierda y a derecha de ése. Si no hay un número en alguna de estas posiciones se entiende que hay un 0. Prueba que, desde la tercera fila en adelante, cada fila contiene al menos un número par (positivo).

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Solución. Escribimos algunos números más del triángulo:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} & & \\
 & & & & & 1 & 2 & 3 & \mathbf{2} & 1 & & \\
 & & & & 1 & 3 & 6 & \mathbf{7} & 6 & 3 & 1 & \\
 & & & 1 & 4 & 10 & \mathbf{16} & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 \\
 & & 1 & 5 & 15 & \mathbf{30} & 45 & 51 & \cdot & \cdot & & \\
 & 1 & 6 & 21 & \mathbf{50} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
. & . & . & \mathbf{.} & . & . & . & . & & & &
\end{array}$$

Vamos a denotar, respectivamente, por A_n, B_n, C_n y D_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ a las sucesiones de números de la primera, segunda, tercera y cuarta líneas diagonales que bajan hacia la izquierda (hemos señalado en negrita los de la cuarta diagonal). Es claro que $A_n = 1$ y $B_n = n$ para todo n.

Se tiene $C_{n+1} = A_n + B_n + C_n = 1 + n + C_n$, de modo que $\Delta C_n = n + 1$ y $\Delta^2 C_n = 1$ para todo n. Así, $C_0 = 0$, $\Delta C_0 = 1$, $\Delta^2 C_0 = 1$ y

$$C_n = 1 \cdot \binom{n}{1} + 1 \cdot \binom{n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Con esto, $D_{n+1} = B_n + C_n + D_n = n + \frac{n(n+1)}{2} + D_n$, de donde $\Delta D_n = n + \frac{1}{2}(n+1)^{(2}$, $\Delta^2 D_n = 1 + (n+1) = n + 2$ y $\Delta^3 D_n = 1$ para todo n. Con lo que $D_0 = 0$, $\Delta D_0 = 0$, $\Delta^2 C_0 = 2$ y $\Delta^3 C_0 = 1$. Entonces

$$D_n = 2 \cdot \binom{n}{2} + 1 \cdot \binom{n}{3} = n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)(n+4)}{6}.$$

Ahora:

- Si $n = 2k$, entonces $B_n = 2k$ es par
- Si $n = 4k + 3$, entonces $C_n = (4k + 3)(2k + 2)$ es par.
- Si $n = 4k + 1$, entonces $D_n = 2 \cdot \frac{k(4k+1)(4k+5)}{3}$ es (un entero) par (y distinto de 0 si $k > 1$).

86. Encuentra el término general de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia:

(a) $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $a_3 = 1$; $a_4 = 2$; $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-4}$ si $n \geq 5$.

(b) $a_0 = 0$; $a_{n+1} = 2a_n - 4n + 3^n$ si $n \geq 0$.

(c) $a_3 = -31$; $5na_n + 2na_{n-1} = 2a_{n-1} + 5$ si $n \geq 1$.

Solución. (a) Ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes y de ecuación característica

$$r^4 - 2r^3 + r^2 - 1 = 0.$$

Se tiene $r^4 - 2r^3 + r^2 - 1 = r^2(r-1)^2 - 1 = (r^2 - r - 1)(r^2 - r + 1)$. Raíces características: $r = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, $r = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$ $(i^2 = -1)$. Solución general:

$$a_n = A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n + C\Big(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)^n + D\Big(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\Big)^n.$$

Por otra parte para $n = 0, 1, 2, 3$ se tiene, a partir de la recurrencia, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$. Y unos cálculos previos:

$$\Big(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\Big)^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; \Big(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\Big)^3 = 2 \pm \sqrt{5};$$

$$\Big(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\Big)^2 = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}; \Big(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\Big)^3 = -1$$

Queda el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A + B + C + D = 1 & [1] \\ \big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)A + \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)B + \big(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\big)C + \big(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\big)D = 0 & [2] \\ \big(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\big)A + \big(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\big)B + \big(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\big)C + \big(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\big)D = 1 & [3] \\ (2+\sqrt{5})A + (2-\sqrt{5})B - C - D = 1 & [4] \end{cases}$$

Resolución: primeramente, de

$$\begin{cases} [1] + [2] - [3] : & 2(C + D) = 0 \\ [2] + [3] - [4] : & (\sqrt{3} - 1)(C - D) = 0 \end{cases}$$

resulta $C = D = 0$. Entonces, de

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ \big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)A + \big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)B = 0 \end{cases}$$

sale $A = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $B = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Finalmente, la solución del problema:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-1}, \end{aligned}$$

vemos así que $a_n = F_{n-1}$, el $(n-1)$-ésimo número de la sucesión de Fibonacci.

(b) Eliminando el término exponencial del lado derecho entre las ecuaciones

$$\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = 3^n - 4n \\ a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3^{n+1} - 4(n+1) \end{cases}$$

resulta la ecuación $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 8n - 4$; restando las ecuaciones

$$\begin{cases} a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 8n - 4 \\ a_{n+3} - 5a_{n+2} + 6a_{n+1} = 8n + 4 \end{cases}$$

resulta la ecuación $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 8$; y restando las ecuaciones

$$\begin{cases} a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 8 \\ a_{n+4} - 6a_{n+3} + 11a_{n+2} - 6a_{n+1} = 8 \end{cases}$$

resulta finalmente la ecuación

$$a_{n+4} - 7a_{n+3} + 17a_{n+2} - 17a_{n+1} + 6a_n = 0$$

lineal homogénea de coeficientes constantes y de ecuación característica

$$r^4 - 7r^3 + 17r^2 - 17r + 6 = 0.$$

Raíces características: $r = 1$ doble, $r = 2$ y $r = 3$. Solución general:

$$a_n = (An + B) + C \cdot 2^n + D \cdot 3^n.$$

Por otra parte para $n = 0, 1, 2, 3$ se tiene, a partir de la recurrencia, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_3 = 3$. Queda el sistema

$$\begin{cases} \phantom{2A +{}} B + C + D = 0 \\ A + B + 2C + 3D = 1 \\ 2A + B + 4C + 9D = 1 \\ 3A + B + 8C + 27D = 3 \end{cases}$$

de solución $A = 4$, $B = 4$, $C = -5$, $D = 1$. Y la solución del problema de recurrencia es

$$a_n = 4 + 4n - 5 \cdot 2^n + 3^n.$$

(c) La recurrencia se reescribe $5na_n = -2(n-1)a_{n-1} + 5$. Ahora vamos a hacer un cambio de sucesión incógnita: $na_n = b_n$, la recurrencia para b_n es más simple: $5b_n = -2b_{n-1} + 5$. Restando las ecuaciones

$$\begin{cases} 5b_n + 2b_{n-1} = 5 \\ 5b_{n+1} + 2b_n = 5 \end{cases}$$

resulta la ecuación $5b_{n+1} - 3b_n - 2b_{n-1} = 0$, lineal homogénea de coeficientes constantes y de ecuación característica $5r^2 - 3r,2 = 0$, con soluciones $r_1 = 1$, $r_2 = -2/5$. De modo que su solución general es

$$b_n = A + B\Big(-\frac{2}{5}\Big)^n.$$

Para $n = 0$ y $n = 1$ tenemos $b_0 = 1465$, $b_1 = -585$, de donde

$$\begin{cases} A + B = 1465 \\ A - \frac{2}{5}B = -585 \end{cases}$$

por tanto $B = 10250/7$, $A = 5/7$ y con eso

$$b_n = \frac{5}{7} + \frac{10250}{7}\Big(-\frac{2}{5}\Big)^n$$

y, para terminar, $a_n = \frac{1}{n} b_n$.

87. Para cada número entero $n \geq 1$, sea $s(n,k)$ el número de subconjuntos que están formados por k de los elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ y que no contienen dos números consecutivos. Prueba:

(a) $s(n,k) = s(n-2, k-1) + s(n-1, k)$.

(b) $s(n,k) = \binom{n-k+1}{n}$.

Solución. (a) Es sencillo ver esta recurrencia: los k-subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que no contienen dos números consecutivos se dividen entre los que contienen como elemento el número n, que son los $(k-1)$-subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ que no contienen dos números consecutivos, en total $s(n-2, k-1)$ subconjuntos, y los que no contienen como elemento el número n, que son los k-subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ que no contienen dos números consecutivos, un total de $s(n-1, k)$ subconjuntos.

De la comparación entre una tabla de los números combinatorios $\binom{n}{k}$ para $n, k \geq 1$ y la de los números $s(n,k)$:

$\binom{n}{k}$ $n \backslash k$	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0
3	**3**	**3**	1	0	0
4	4	**6**	4	1	0
5	5	10	10	5	1
6	6	15	20	15	6
7	7	21	35	35	21
8	8	28	56	70	56

$s(n,k)$ $n \backslash k$	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0
3	**3**	1	0	0	0
4	4	**3**	0	0	0
5	5	**6**	1	0	0
6	6	10	4	0	0
7	7	15	10	1	0
8	8	21	20	5	0
9	9	28	35	15	1
10	10	36	56	35	6

resulta, observando el sucesivo desplazamiento vertical de las columnas, la identidad propuesta, $s(n,k) = \binom{n-k+1}{n}$.

88. ¿De cuántas maneras se puede cambiar 1 euro en monedas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos?

Solución. Denotemos por $F(n_1, n_2, \ldots, n_k; N)$ el número de modos de cambiar N céntimos con monedas de n_1, n_2, … y n_k céntimos (para $N = 0$ el valor es 1, y para $N < 0$ es 0).

Y pongamos

$$\begin{aligned}
U(N) &= F(1;N)\\
A(N) &= F(1,2;N)\\
B(N) &= F(1,2,5;N)\\
C(N) &= F(1,2,5,10;N)\\
D(N) &= F(1,2,5,10,20;N)\\
E(N) &= F(1,2,5,10,20,50;N)
\end{aligned}$$

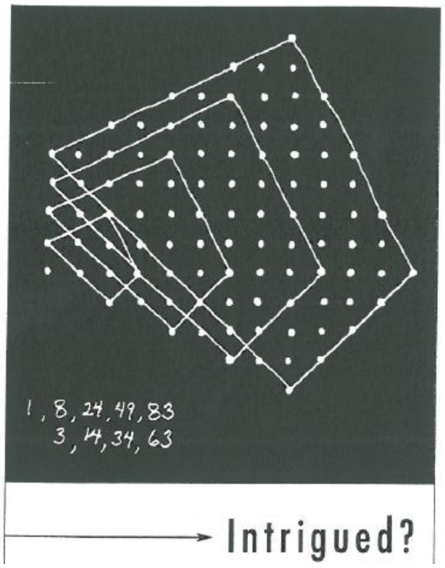
Queremos hallar $E(100)$. Se tiene claramente $U(N) = 1$ para todo $N \geq 0$ (el único cambio de N todo en monedas de 1 céntimo), y se cumplen las siguientes recurrencias:

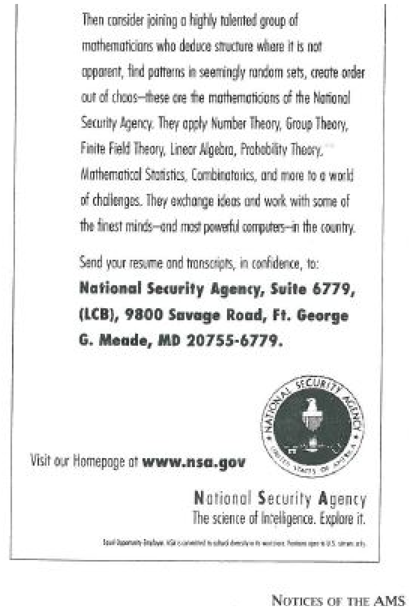
$$\begin{aligned}
&A(N) = F(1,2;N-2) + F(1;N) = A(N-2) + 1\\
&B(N) = B(N-5) + A(N)\\
&C(N) = C(N-10) + B(N)\\
&D(N) = D(N-20) + C(N)\\
&E(N) = E(N-50) + D(N)
\end{aligned}$$

Con estas fórmulas se puede llevar a cabo el cálculo a mano de $E(100) = 4562$ como se muestra en la tabla siguiente, que se abrevia un poco de porque la recurrencia para $A(N)$ da (por inducción, por ejemplo) que $A(2k-1) = k$ y $A(2k) = k+1$ para todo $k \geq 1$, lo que permite rellenar primero la columna de valores $A(n)$ para $n = 5\ell$.

n	$A(n)$	$B(n)$	$C(n)$	$D(n)$	$E(n)$
0	1	**1**	1	1	1
5	**3**	**4**			
10	6	10	**11**	11	
15	8	18			
20	11	**29**	**40**	41	
25	13	42			
30	16	58	98	**109**	
35	18	76			
40	21	97	195	236	
45	23	120			
50	26	146	**341**	**450**	**451**
55	28	174			
60	31	205	546	782	
65	33	238			
70	36	274	820	1270	
75	38	312			
80	41	353	1173	1955	
85	43	396			
90	46	442	1615	2885	
95	48	490			
100	51	541	2156	**4111**	**4562**

89. Encuentra el término general de la sucesión que da las áreas de los sucesivos cuadriláteros que se disponen en una rejilla unitaria como muestra la figura (usa la *fórmula de Pick*).




Then consider joining a highly talented group of mathematicians who deduce structure where it is not apparent, find patterns in seemingly random sets, create order out of chaos—these are the mathematicians of the National Security Agency. They apply Number Theory, Group Theory, Finite Field Theory, Linear Algebra, Probability Theory, Mathematical Statistics, Combinatorics, and more to a world of challenges. They exchange ideas and work with some of the finest minds—and most powerful computers—in the country.

Send your resume and transcripts, in confidence, to:
National Security Agency, Suite 6779, (LCB), 9800 Savage Road, Ft. George G. Meade, MD 20755-6779.

Visit our Homepage at **www.nsa.gov**

National Security Agency
The science of Intelligence. Explore it.

NOTICES OF THE AMS

Solución. En la figura vemos una sucesión de cuadriláteros cuyos vértices son puntos de una rejilla o trama cuadrada de puntos. Para la sucesión t_n que cuenta el número de puntos que cada cuadrilátero contiene en total, incluidos vértices y demás puntos en los segmentos frontera, resulta la siguiente tabla de diferencias:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
t_0=\mathbf{1} & & 8 & & 24 & & 49 & & 83 & & 126 & & 178 & & \dots \\
& \mathbf{7} & & 16 & & 25 & & 34 & & 43 & & 52 & & \dots & \\
& & \mathbf{9} & & 9 & & 9 & & 9 & & 9 & & \dots & &
\end{array}$$

Término general:

$$t_n = 1 + 7\binom{n}{1} + 9\binom{n}{2} = 1 + 7n + \frac{9}{2}n(n-1) = \frac{9n^2+5n+2}{2}.$$

Para la sucesión i_n del número de "puntos interiores" en los sucesivos cuadriláteros resulta la siguiente tabla de diferencias:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
i_0=\mathbf{1} & & 3 & & 14 & & 34 & & 63 & & 101 & & 148 & & \dots \\
& \mathbf{2} & & 11 & & 20 & & 29 & & 38 & & 47 & & \dots & \\
& & \mathbf{9} & & 9 & & 9 & & 9 & & 9 & & \dots & &
\end{array}$$

Término general:

$$i_n = 1 + 2\binom{n}{1} + 9\binom{n}{2} = 1 + 2n + \frac{9}{2}n(n-1) = t_n - 5n = \frac{9n^2-5n+2}{2}$$

La *fórmula de Pick* da el área de un polígono con vértices en la trama unitaria como $i + \frac{b}{2} - 1$, siendo i el número de puntos trama interiores al polígono y b el número de puntos en el borde. La sucesión de áreas de los polígonos de la figura es, entonces,

$$A_n = i_n + \frac{t_n - i_n}{2} - 1 = \frac{9n^2-5n+2}{2} + \frac{5n}{2} - 1 = \frac{(3n)^2}{2}.$$

90. Los siete enanitos marchan a trabajar cada día en fila india, ajustándose a una disposición por estaturas que puede ser, o bien la de 'bajo-alto-bajo-alto-…', o bien la de 'alto-bajo-alto-bajo-…', es decir, una disposición en la que nunca haya tres de ellos seguidos en orden de estaturas creciente o decreciente. Los siete tienen distintas estaturas. ¿Cuántos días pueden ir al trabajo manteniendo cada día una ordenación diferente? ¿Y si todos los días fuera acompañándolos Blancanieves?

Solución. Supongamos que numeramos a los siete enanitos por orden de estatura: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Blancanieves sería el personaje número 8, ya que es más alta que todos ellos. Designemos por $F(n)$ el número de disposiciones en línea que pueden formar los n personajes 1, 2, …, n de acuerdo con la regla dada, o bien el número de las permutaciones de los elementos 1, 2, …, n en las que nunca hay tres seguidos en orden numérico creciente o decreciente. El problema nos pregunta por $F(7)$ y $F(8)$.

Designemos por $A(n)$ el número de las permutaciones de esta clase que empiezan por 'alto-bajo' y por $B(n)$ el número de las que empiezan por 'bajo-alto'. Así, para los primeros valores de n:

- $A(1) = B(1) = F(1) = 1$ (la única permutación en este caso es la 1).
- $A(2) = B(2) = 1$ (permutaciones 21 y 12 respectivamente). Y $F(2) = 2$.
- $A(3) = B(3) = 2$ (permutaciones 213, 312 y 132, 231 respectivamente). Y $F(3) = 4$.

Parece que sea $A(n)$ igual a $B(n)$. En efecto es así, porque al cambiar en una permutación cualquiera cada número k por n+1−k la permutación cambia de tipo. Así, para $n = 4$, la 213 del tipo que se cuenta en $A(4)$ pasa, mediante k ↦ 4−k, a la 231 que es del tipo contado en $B(4)$.

Tenemos por tanto $A(n) = B(n)$ y $F(n) = 2A(n)$ cuando $n > 1$, mientras que $A(1) = B(1) = F(1) = 1$.

Para calcular $F(4)$: el 4 se podría colocar en primer lugar, lo que serían $B(3)$ posibilidades, o bien en segundo lugar, lo que serían $\binom{3}{1} \cdot B(2)$ posibilidades, o bien en tercer lugar, que serían $\binom{3}{2} \cdot B(2)$ posibilidades, o en cuarto lugar, $B(3)$ posibilidades (por ejemplo, estamos considerando que, con el 4 en posición $i+1$, la permutación de los i elementos precedentes, leída de derecha a izquierda, es una de las $B(i)$, mientras que la permutación de los restantes $(n-1-i)$ elementos es una de las $B(n-1-i)$). Así,

$$F(4) = 2 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 = 10, \qquad A(4) = B(4) = 5.$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned} F(5) &= B(4) + \binom{4}{1} B(3)B(1) + \binom{4}{2} B(2)B(2) + \binom{4}{3} B(1)B(3) + B(4) \\ &= 5 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 = 32 \end{aligned}$$

$(A(5) = B(5) = 16)$ y, en general,

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(n-1-k)B(k)$$

si tomamos también $B(0) = B(1) = 1$. Así,

$$
\begin{aligned}
F(6) &= \big(B(5) + 5B(4) + 10B(2)B(3)\big) \cdot 2 = 122, \\
F(7) &= \big(B(6) + 6B(5) + 15B(2)B(4)\big) \cdot 2 + 20B(3)B(3) = 544 \text{ y, finalmente,} \\
F(8) &= \big(B(7) + 7B(6) + 21B(2)B(5) + 35B(3)B(4)\big) \cdot 2 \\
&= (272 + 7 \cdot 61 + 21 \cdot 16 + 35 \cdot 2 \cdot 5) \cdot 2 = 2770.
\end{aligned}
$$