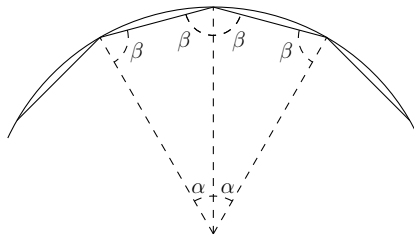


Seminario de problemas Curso 2024-25. Hoja 7

56. El ángulo interior de un polígono regular es el ángulo que forman dos lados consecutivos. ¿Cuántos polígonos regulares tienen un ángulo interior que es un número par?

Solución.

Sea N el número de lados del polígono regular. Entonces lo podemos dividir en N triángulos isósceles iguales, tal como se ve a continuación.



De aquí se deduce que el ángulo α es igual a $360^\circ/N$ y, por lo tanto, el ángulo interior del polígono, que llamaremos I , es igual a 2β , por lo que

$$I = 2\beta = 180^\circ - \frac{360^\circ}{N}.$$

Como I es un número par, entonces se puede poner de la forma $I = 2k$, siendo k un número natural. Es decir,

$$2k = 180 - \frac{360}{N} \Rightarrow k = 90 - \frac{180}{N}.$$

De aquí deducimos que $180/N$ es un número natural y, por lo tanto, N un divisor de 180. Así pues, nuestro problema se reduce a saber calcular el número de divisores de 180. Podríamos hacerlo enumerando sus divisores, pero lo que haremos es contar el número de divisores de un número cualquiera, sabiendo cuál es su descomposición en factores primos.

Sea $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, la descomposición en factores primos de N , donde $p_1, \dots, p_k$ son números primos y $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ números enteros mayores o iguales que uno. Entonces, no es difícil ver que el número de divisores de N , que llamaremos D , es igual a

$$D = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_k).$$

Como $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, el total de divisores de 180 es igual a $(1+2)(1+2)(1+1) = 18$. Ahora bien, entre los divisores se encuentran el 1 y el 2, pero un polígono regular tiene siempre tres o más lados, luego estos dos divisores hay que descartarlos. Concluimos, entonces, que el número de polígonos regulares cuyo ángulo interior es un número par es 16.

57. ¿Cuál es el número más pequeño que tiene exactamente 28 divisores?

Solución.

Por el problema anterior, sabemos que el número de divisores del número N que buscamos se deduce de su descomposición en factores primos, por lo que

$$28 = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_k)$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ números enteros mayores o iguales que uno que son los exponentes de los números primos que entran en la descomposición del número buscado. Tenemos que

$$\begin{aligned} 28 &= (1 + 27) & N &= p_1^{27} \\ 28 &= (1 + 13)(1 + 1) & N &= p_1^{13}p_2 \\ 28 &= (1 + 6)(1 + 3) & N &= p_1^6p_2^3 \\ 28 &= (1 + 6)(1 + 1)(1 + 1) & N &= p_1^6p_2p_3 \end{aligned}$$

Tomando p_1, p_2 y p_3 lo más pequeño posible, es fácil ver que el número más pequeño con 28 divisores es

$$N = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 = 960.$$

58. ¿Cuánto vale la suma de los inversos de los divisores de 360?

Solución.

Sean $d_1, d_2, \dots, d_k$ los divisores de 360, entonces debemos calcular

$$s = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_k}.$$

Multiplicando y dividiendo por 360 tenemos que esta suma se puede escribir también como

$$s = \frac{1}{360} \left(\frac{360}{d_1} + \frac{360}{d_2} + \cdots + \frac{360}{d_k} \right).$$

Pero como los denominadores son divisores de 360, resulta que $360/d_j$, con $j = 1, \dots, k$, es también un divisor de 360 y entonces

$$s = \frac{1}{360} (d_1 + d_2 + \cdots + d_k).$$

Así, hemos reducido el problema a saber calcular la suma de los divisores de un número, en este caso 360. Este problema es muy parecido al de calcular el total de divisores de un número. De este modo, si la descomposición de un número N en factores primos es

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

la suma S_N de sus divisores es igual a

$$S_N = (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{\alpha_2}) \cdots (1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{\alpha_k}).$$

Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, entonces

$$S_{360} = (1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2)(1 + 5) = 15 \cdot 13 \cdot 6.$$

Finalmente, $s = S_{360}/360 = (15 \cdot 13 \cdot 6)/360 = 13/4$.

59. ¿Para cuántos números n el resto de dividir 2024 entre n es 1 o 2?

Solución.

Los números n para los que el resto de dividir 2024 por n es 1 son aquellos que son divisores de 2023 y que no lo son de 2024. Ahora bien, $2023 = 7 \cdot 17^2$, que tiene exactamente 6 divisores, entre ellos el 1, que debemos descartar al ser divisor de 2024. Es decir hay 5 números para los que el resto de dividir 2024 por n es 1.

De manera análoga, los números n para los que el resto de dividir 2024 por n es 2 son aquellos que son divisores de 2022 y que no lo son de 2024. Podemos ver que $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, que tiene 8 divisores, entre ellos el 1 y el 2, que son divisores de 2022. Por tanto hay 6 números para los que el resto de dividir 2024 por n es 2.

Teniendo en cuenta lo anterior, hay 11 números n de manera que el resto de dividir 2024 entre n es 1 o 2. Estos números pueden obtenerse de la lista de divisores de 2022 y 2023 y son

$$3, 6, 7, 17, 119, 289, 337, 674, 1011, 2022, 2023.$$

60. Encuentra todas las soluciones de la ecuación $m + 2mn + n = 37$, donde m y n son números naturales. ¿Cuáles serían las posibles soluciones si el segundo miembro es 2024? *Pista: te ayudará saber que 4049 es primo.*

Solución.

Al ser m y n números naturales, tenemos que $m, n \geq 1$ y, de la propia ecuación, se ve que los posibles valores de m y n no pueden ser grandes. De hecho,

$$m + 2nm + n \geq 3m \Rightarrow m \leq 12.$$

Por otra parte, tomando congruencias módulo 3, uno de los dos números m o n es congruente con uno módulo 3. Por tanto, debemos probar los valores $m = 1, 4, 7, 10$, que nos dan las parejas (1,12), (2,7). Por la simetría hay otras dos parejas que son (2,7), (12,1).

El método anterior resultaría ineficaz si el segundo miembro de la ecuación fuera un número grande, por ejemplo 2024. Lo mejor es tratar de encontrar una forma factorizada de la ecuación. En este sentido, buscamos un producto de dos factores cuyo desarrollo nos dé la expresión del primer miembro o un múltiplo de la misma. En este caso, el término $2mn$ sugiere buscar factores de la forma $(2m + a)$ y $(2n + b)$. Tomando $a = b = 1$, resulta

$$(2m + 1)(2n + 1) = 2m + 4mn + 2n + 1 = 2(m + 2mn + n) + 1.$$

Teniendo esto en cuenta, podemos escribir

$$2(m + 2mn + n) + 1 = 2 \cdot 37 + 1 = 75 = (2m + 1)(2n + 1).$$

Ahora lo que buscamos son dos números naturales cuyo producto es 75. Observemos que cada uno de los factores es estrictamente mayor que 1, por lo que las únicas soluciones posibles son

$$(2m + 1)(2n + 1) = 3 \cdot 25, 5 \cdot 15, 15 \cdot 5, 25 \cdot 3,$$

que dan lugar a los pares de soluciones que hemos encontrado antes.

Para la ecuación $m + 2mn + n = 2024$, mediante la técnica de factorización, encontramos que

$$(2m + 1)(2n + 1) = 4049 = 1 \cdot 4049,$$

que no tiene soluciones con $m, n \geq 1$. En general, la ecuación $m + 2mn + n = k$ no tendrá soluciones en los naturales si $2k + 1$ es primo.

- 61.** En la secuencia 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, ... ¿qué número ocupa el lugar 2024?

Solución.

Los números que aparecen en esta secuencia son las potencias de 2 y aparecen un número de veces igual a la potencia que representan. Así, después del último 8, los siguientes 16 números serán igual a 16, los siguientes 32 serán igual a 32 y así sucesivamente. No es difícil ver que el primer 2 aparece en la posición 2, el primer 4 en la posición 4, etc. Teniendo en cuenta que $2^{10} = 1024$ y $2^{11} = 2048$, el número que ocupa la posición 2024 será el 1024 (el primer 1024 aparece en la posición 1024 y el último en la posición 2047).

- 62.** En un examen de matemáticas, 5 alumnos han obtenido las siguientes notas sobre 100: 71, 76, 80, 82 y 91. El profesor va introduciendo las notas al azar en una hoja de cálculo y se da cuenta de que, cada vez que introduce una, la nota media es siempre un número entero. ¿Cuál es la última nota que introdujo el profesor?

Solución.

Como la media, a medida que se introducen las notas, es un número entero, la suma de las tres primeras notas introducidas tiene que ser un múltiplo de 3. Fijémonos en los restos de las 5 notas cuando se dividen por 3:

$$71 \text{ (resto 2), } 76 \text{ (resto 1), } 80 \text{ (resto 2), } 82 \text{ (resto 1), } 91 \text{ (resto 1).}$$

La única forma de que la suma de tres notas sea múltiplo de tres es que la suma de los restos sea múltiplo de 3. Esto solo es posible si sumamos las tres notas que dejan resto 1, es decir 76, 82 y 91 (observemos que las dos primeras han tenido que ser 76 y 82, aunque no sepamos en qué orden).

Al introducir la siguiente nota, la suma resultante tiene que ser múltiplo de 4. Como la suma de las tres primeras notas es impar, la siguiente nota introducida necesariamente tiene que ser 71. Así pues, la última nota que introdujo el profesor fue 80.

- 63.** Ana, Bea, Carla y Daniela se encuentran una bolsa llena de cromos. Ana cuenta los cromos de tres en tres y le sobran 2. Bea los cuenta de 5 en 5 y le sobran 3 y Carla los cuenta de 19 en 19 y le sobran 7. Daniela no quiere contarlos y trata de adivinar cuántos hay con la información que ya tiene. ¿Cuál es el menor número de cromos que podría contener la bolsa? ¿cuántos podría haber si hay al menos 500 cromos pero no más de 1500?

Solución.

Observemos que el número buscado es de la forma $N = 19 \cdot k + 7$. Por otra parte, al dejar resto 3 al dividir por 5, el número acaba en 3 o en 8. De aquí deducimos que $19 \cdot k$ acaba en 1 o en 6. El valor más pequeño de k que podemos considerar es, entonces, $k = 4$, que nos da $N = 83$. Como 83 deja resto 2 al dividir por 3, este es el menor número de cromos que podría haber en la bolsa.

Es posible obtener más soluciones añadiendo a la solución ya obtenida un múltiplo cualquiera del mínimo común múltiplo de 3, 5 y 19. Es decir, las soluciones son de la forma

$$N = 83 + 285j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Como $500 \leq 83 + 285j \leq 1500$, resulta $2 \leq j \leq 4$ y obtenemos las posibles soluciones 653, 938, 1223.

- 64.** Los dígitos, 1, 4, 9, 2 se usan una vez cada uno para formar un número N de 4 cifras (por ejemplo 1492). ¿Cuál es la suma de todos los posibles N ?

Solución.

Podría parecer que para resolver el problema necesitamos escribir todos los números que se pueden formar usando una sola vez las cifras que nos dan. Sin embargo, podemos obtener esta suma sin necesidad de escribirlos todos. Para ver cómo, fijémonos en una cifra cualquiera cuando ocupa una posición determinada. Por ejemplo el 9 cuando está en la última posición. ¿Cuántos números hay que acaben en 9? Pues tantos como posibles ordenaciones de los otros tres números en las otras tres posiciones. Esto nos da seis números.

Argumentando de manera similar, habrá 6 números que acaben en 4, otros 6 que acaben en 2 y otros 6 que acaben en 1. Lo mismo podemos decir del resto de posiciones del número. Habrá 6 números cuya penúltima cifra sea un 9, etc. Así, al sumar todos los números, estaremos sumando 1, 2, 4, 9 seis veces en cada una de las posiciones (unidades, decenas, centenas y millares). Por tanto, la suma será:

$$6 \cdot (1 + 2 + 4 + 9) \cdot (1 + 10 + 100 + 1000) = 6 \cdot 16 \cdot 1111 = 106656.$$