49. ¿Existe algún triángulo rectángulo cuyos ángulos verifiquen la identidad pitagórica?

Solución.

Sabemos que uno de los ángulos de un triángulo rectángulo mide 90° y cada uno de los otros dos es mayor de 0° y menor que 90°, por lo tanto el ángulo mayor será el ángulo recto de 90°. Sean α y β los otros ángulos del triángulo. Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, tendremos que

$$180 = 90 + \alpha + \beta \Rightarrow 90 = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = 90 - \alpha.$$

Como también queremos que se verifique la identidad pitagórica, los ángulos deberán verificar que

$$90^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Podemos sustituir β en esa expresión, resultando

$$90^2 = \alpha^2 + (90 - \alpha)^2 = \alpha^2 + 90^2 - 180\alpha + \alpha^2 \Rightarrow 2\alpha^2 - 180\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha(\alpha - 90) = 0.$$

De la ecuación anterior deducimos que el valor de α debe ser 90° (en cuyo caso β sería 0°) o 0° (en cuyo caso β sería 90°). En cualquier caso tendríamos un triángulo con un ángulo que mide 0°, lo cual es imposible. Por lo tanto los ángulos de un triángulo rectángulo no pueden verificar la identidad pitagórica.

50. Argumenta si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

1. Si un grupo de amigos está formado por 13 personas, entonces habrá dos personas que cumplan años el mismo mes.
2. En un tablero de ajedrez se pueden colocar 9 torres de modo que ninguna ataque a ninguna otra.

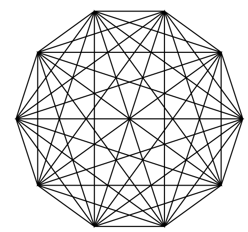
Solución.

1. VERDADERA. En el año existen 12 meses diferentes y nosotros tenemos 13 personas. Podemos pensar en los meses como si fueran cajas y colocamos a las personas en las cajas. Pondremos a una persona en una caja si ha nacido en ese mes. Como tenemos más personas que cajas, dos tendrán que estar en la misma caja, y esto quiere decir que estas dos personas cumplen años el mismo mes del año.
2. FALSA. Vamos a hacer algo similar al apartado anterior. En un tablero de ajedrez hay 8 filas horizontales, estas van a ser nuestras cajas y en ellas colocaremos las torres. Como tenemos 9 torres, dos de ellas tienen que ir en la misma caja, es decir, en la misma fila, pero en este caso estas torres se estarán atacando entre sí, por lo tanto no hay ninguna forma posible de colocarlas como pide el enunciado.

51. Los habitantes de Andromeda solo usan billetes con valor de 3 y 5. Todos los pagos son exactos, es decir, sin cambios. ¿Qué pagos nos son posibles bajo estas condiciones?

Solución.
Jugando un poco con los números 3 y 5 vemos en seguida que podemos conseguir pagar $3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots$ Nos puede parecer que a partir del 8 podemos conseguir cualquier otro número, y esto es así, ya que tenemos 3 números consecutivos, y a partir de ellos, sumando la cantidad apropiada de treses podemos llegar a cualquier otro número. Por ejemplo, para los múltiplos de 3, partimos de 9 y sumando 3 podemos obtener $12, 15, 18, 21, 24, \ldots,$ por cada 3 que sumemos obtenemos el siguiente múltiplo de 3. Para los que son 1 más que un múltiplo de 3, partimos de 10 y hacemos lo mismo, así conseguimos $13, 16, 19, 22, 25, \ldots,$ y para los que son 2 más que un múltiplo de 3 podemos partir de 8 y hacer exactamente lo mismo. Es decir, podemos pagar cualquier cantidad mayor que 8. Para las cantidades menores que 8 solo podemos conseguir $0, 3, 5$ y 6. En conclusión, los pagos que son imposibles son $1, 2, 4$ y 7.

52. Supongamos que tenemos 10 puntos equiespaciados en una circunferencia. Unimos cada par de puntos por un segmento. Consideramos ahora una recta en el plano que no pase por ninguno de los puntos. ¿Cuántos segmentos como máximo cortará esta recta?



Solución.
Primero notemos que una recta divide el plano en dos partes, y cada uno de nuestros puntos puede estar únicamente en una de las dos partes. Si dos puntos están al mismo lado de la recta, el segmento que ellos formen no cortará la recta, en cambio si están en distinto lado la recta cortará el segmento en algún punto. Si suponemos que a un lado de la recta hay x puntos, al otro habrá $10 - x$ puntos. Tenemos que contar cuántos segmentos con puntos en distinto lado de la recta podemos conseguir. Cada uno de los x puntos lo podemos unir con cualquiera de los otros $10 - x$, es decir, en total la recta cortará $x(10 - x)$ segmentos. Ahora bien, como tenemos 10 puntos, x puede tomar los valores $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ y 10. Por la simetría de x y $10 - x$, podemos comprobar simplemente los valores $0, 1, 2, 3, 4$ y 5 y así obtenemos el Cuadro 1 Es decir, el máximo

x	Cortes
0	0
1	10
2	18
3	21
4	24
5	25

Cuadro 1

número de cortes se consigue cuando la recta separa a los puntos en dos grupos de 5, y el número de cortes es 25. Otra forma de concluir este ejercicio es darse cuenta que $x(10 - x) = -x^2 + 10x$ es la ecuación de una parábola con las ramas hacia abajo. Para este tipo de parábolas el valor máximo se alcanza en su vértice. Una parábola tiene por ecuación general $ax^2 + bx + c$ y su vértice es el punto $-\frac{b}{2a}$. En nuestro caso $a = -1$ y $b = 10$, por lo tanto el vértice es el punto $-\frac{10}{-2} = 5$ y, para calcular el valor máximo alcanzado, basta con sustituir el valor 5 en la fórmula de la parábola, con lo que se obtiene $-5^2 + 10 \cdot 5 = 25$.

53. Se escriben los números del 19 al 101 de manera consecutiva, resultando en el número $192021\ldots100101$. ¿Cuál es la mayor potencia de 3 que divide al número así formado?

Solución.
Una de las primeras ideas que podríamos tener es comprobar si este número es divisible por 3 o por 9, que son las menores potencias de 3. El criterio de divisibilidad del 3 es que la suma de las cifras del número sea un múltiplo de 3. De forma similar, el del 9 es que la suma de las cifras sea un múltiplo de 9. Entonces calculemos la suma de sus cifras. Para ello vamos a trocear el número que habíamos formado y sumar las cifras según los trozos que aparecen en el Cuadro 2.

Dígitos	Suma
19	$1+9=19$
20212223242526272829	$2\cdot 10+45=65$
30313233343536373839	$3\cdot 10+45=75$
40414243444546474849	$4\cdot 10+45=85$
50515253545556575859	$5\cdot 10+45=95$
60616263646566676869	$6\cdot 10+45=105$
70717273747576777879	$7\cdot 10+45=115$
80818283848586878889	$8\cdot 10+45=125$
90919293949596979899	$9\cdot 10+45=135$
100101	$1+1+1=3$

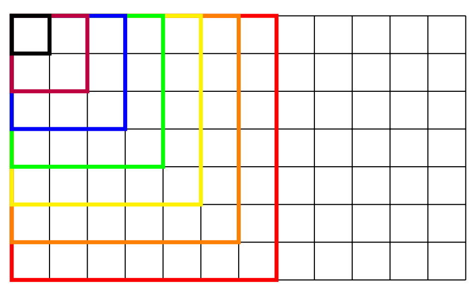
Cuadro 2

Ahora solo nos falta sumar los resultados que aparecen en el Cuadro 2, esto es

$$19+65+75+85+95+105+115+125+135+3=813.$$

Por último, observemos que la suma de las cifras de 813 es 12, el cual es un múltiplo de 3 pero no de 9. Por lo tanto la mayor potencia de 3 que divide al número que habíamos formado es 3.

54. ¿Cuántos cuadrados hay en la imagen? No solo buscamos los cuadrados pequeños, también queremos contar los que están formado por 4 cuadrados pequeños, o por 9, o por 16, ..., que viéndolos juntos parecen un cuadrado más grande.

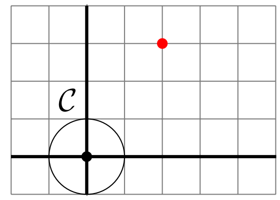


Solución.
El rectángulo de la figura tiene 7 filas y 12 columnas, por lo tanto es claro que tiene $7\cdot 12=84$ cuadrados pequeñitos, pero si juntamos 4 cuadrados pequeños obtenemos un cuadrado 2×2 más grande. Esos también los tenemos que contar y los cuadrados $3\times 3, 4\times 4$ y así hasta 7×7. Para formar cuadrados 2×2 basta con considerarlos como la intersección de las filas y columnas de "tamaño" 2. Así que debemos contar cuantas filas y columnas de esta forma hay. Si nos fijamos hay 8 líneas horizontales, que son las que nos dan las 7 filas de cuadrados. Podemos construir una fila de tamaño 2 si cogemos una de estas

líneas y contamos 2 hacia abajo, esto lo podemos hacer con todas las líneas salvo con las dos últimas, por lo tanto tendremos 6 filas de tamaño 2. De forma similar, contando de izquierda a derecha tenemos 11 columnas de tamaño 2, por lo tanto tendremos $6 \cdot 11 = 66$ cuadrados 2×2. Un razonamiento similar nos da 5 filas y 10 columnas de tamaño 3, que nos dan $5 \cdot 10 = 50$ cuadrados de tamaño 3×3. Continuando así obtendremos $4 \cdot 9$ cuadrados de tamaño 4×4, $3 \cdot 8$ cuadrados de tamaño 5×5, $2 \cdot 7$ cuadrados de tamaño 6×6 y $1 \cdot 6$ cuadrados de tamaño 7×7. En total hay

$$7 \cdot 12 + 6 \cdot 11 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 6 = 280.$$

55. Sea C una circunferencia centrada en $(0,0)$ de radio 1. Dibujamos otra circunferencia, C', de centro $(2,3)$ de radio R. Calcular todos los valores de R, si es que existe alguno, para los cuales la nueva circunferencia C' corta a la circunferencia C en un único punto.



Solución.
Observemos primero que cualquier circunferencia es simétrica tomando como eje de simetría uno cualquiera de sus diámetros. De esta forma si tenemos dos circunferencias y unimos sus centros, esta recta será un diámetro de ambas circunferencias a la vez (Figura 1).

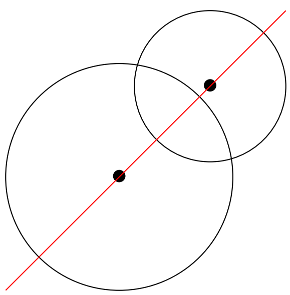


Figura 1: Simetría respecto del diámetro

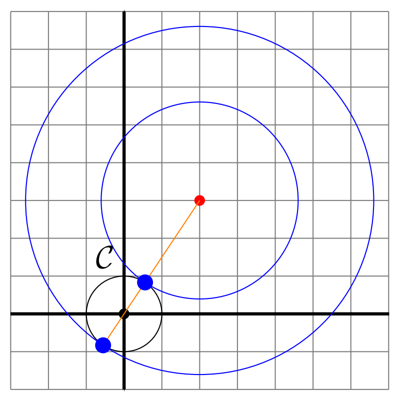


Figura 2: Esquema del problema

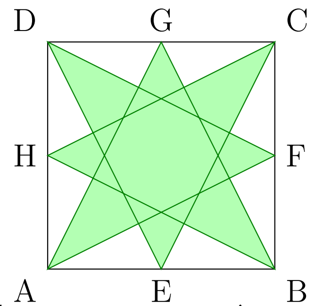
Por esta simetría, si dos circunferencias se cortan, también se cortarán en el punto simétrico respecto al diámetro que uno sus centros. Como queremos que las circunferencias se corten en un único punto, este punto debe ser su propio simétrico, y estos puntos son precisamente los que se encuentran en el eje de simetría. Volviendo a nuestro problema, queremos que este punto esté en el eje de simetría, que será la recta que una los puntos $(0,0)$ y $(2,3)$ (diámetro de la circunferencia $\mathcal{C}$) y a la vez en la circunferencia. Solo hay dos puntos que cumplan esta propiedad y son los que aparecen en azul en la Figura 2.

No necesitamos saber cuáles son estos puntos, solo necesitamos saber su distancia al punto $(2,3)$, pues esta distancia será el radio que tiene que tener la circunferencia $\mathcal{C}'$ de centro $(2,3)$ para cortar solo una vez a la circunferencia $\mathcal{C}$. Usando el teorema de Pitágoras podemos calcular la distancia entre los puntos $(0,0)$ y $(2,3)$. Esta distancia será $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. Ahora bien, los puntos azules están sobre el diámetro de la circunferencia

$\mathcal{C}$ así que sabemos que están sobre el eje de simetría a 1 unidad de distancia del $(0,0)$. El punto que está más arriba entonces estará a distancia $\sqrt{13}-1$ del punto $(2,3)$ y el punto que está más abajo estará a distancia $\sqrt{13}+1$. Estas distancias son los radios que debe de tener una circunferencia de centro $(2,3)$ para cortar a la circunferencia $\mathcal{C}$ en un único punto.

En conclusión, para obtener lo que nos pide el problema, el radio de la circunferencia $\mathcal{C}'$ de centro $(2,3)$ debe ser o bien $\sqrt{13}-1$, o bien, $\sqrt{13}+1$.

56. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 10, y sean E, F, G, H los puntos medios de sus lados. Unimos cada punto medio con los vértices que forman el lado opuesto, calcular el área de la figura así formada.



Solución.
En este ejercicio es más fácil calcular el área de la zona blanca y luego restar esta área al área total del cuadrado ($10^2 = 100$) para así obtener el área de la estrella verde.

La zona blanca está formada por 8 triángulos y, debido a la simetría del dibujo, todos estos triángulos tienen la misma área, por lo tanto calcularemos el área de uno solo de estos triángulos y la multiplicaremos por 8. Para calcular el área de uno solo de estos triángulos podemos simplificar el dibujo, puesto que solo necesitamos las dos rectas que determinan el triángulo, junto con el lado del cuadrado. Nos podemos centrar en el triángulo que tiene por lado el segmento AE. La Figura 3 muestra esta simplificación. Podemos ver

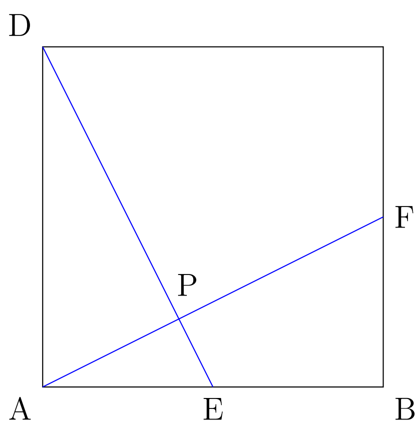


Figura 3: Simplificación

que los triángulos ADE y ABF son congruentes, ya que los lados son iguales dos a dos, es decir, $AD = AB = 10$, $AE = BF = 5$, y usando la identidad de Pitágoras, $AF = DE = \sqrt{10^2+5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$. Por lo tanto, los ángulos respectivos también son iguales, es decir, $\angle ADE = \angle FAB$, $\angle AED = \angle AFB$ y $\angle DAE = \angle ABF = 90°$.

Nos fijamos ahora en el triángulo APE, veamos que es un triángulo rectángulo, con ángulo recto en $\angle APE$. El ángulo $\angle AEP$ coincide con el ángulo $\angle AED$ y el ángulo $\angle EAP$ coincide con el ángulo $\angle BAF = \angle ADE$, es decir, los triángulos ADE y AEP tienen dos ángulos iguales, como los ángulos de un triángulo suman 180°, el tercer ángulo también debe de ser igual, es decir, $\angle APE = \angle DAE = 90°$. Otra forma de decir esto es decir que los triángulos AED y AEP son semejantes.

Queremos calcular el área del triángulo AEP, al ser rectángulo en $\angle APE$, nos basta con conocer las longitudes de los lado AP y PE. Los triángulos semejantes cumplen que los lados correspondientes son proporcionales. Aplicando esto a los triángulos ADE y AEP resulta

$$\frac{PE}{AE} = \frac{AE}{DE} = \frac{PA}{AD}.$$

De la primera igualdad podemos calcular la longitud de PE:

$$PE = \frac{AE \cdot AE}{DE} = \frac{5 \cdot 5}{5\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Y de la segunda igualdad calculamos PA:

$$PA = \frac{AE \cdot AD}{DE} = \frac{5 \cdot 10}{5\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Sabiendo estas longitudes, el área del triángulo APE es $\dfrac{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 5$. Recordamos que esta es el área de un único triángulo blanco, como la zona blanca estaba formada por 8 triángulos del mismo área, resulta que el área de la zona blanca es $8 \cdot 5 = 40$. Por último, lo que buscábamos no es el área de la zona blanca, sino de la estrella verde, esta área será el área del cuadrado menos el área de la zona blanca, es decir

$$\boxed{10^2 - 40 = 60}$$