

Seminario de problemas. Curso 2018-19. Hoja 7 (Combinatoria)

- 62.** Un claustro tuvo 40 reuniones, en cada reunión participaron 10 miembros del claustro. Dos miembros del claustro participaron conjuntamente en a lo sumo una reunión. Demostrar que el claustro tenía al menos 60 miembros.

SOLUCIÓN. Si el claustro tiene n miembros, entonces se pueden formar

$$C_2^n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

parejas de miembros del claustro.

Por otra parte, como a cada reunión tiene 10 participantes, en cada reunión hay

$$\binom{10}{2} = 45$$

parejas y como ha habido 40 reuniones, se tiene que

$$40 \times 45 = 1800$$

parejas de podrían formar diferentes (no se repiten las parejas en las reuniones). Por tanto,

$$1800 \leq \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 3600 \leq n(n-1) \Rightarrow n \geq 60.$$

OTRA SOLUCIÓN CON EL PRINCIPIO DEL PALOMAR. Para obtener una contradicción, supongamos que el claustro tiene a lo sumo 59 miembros. Como el total de personas que asisten a todas las reuniones es 400 y

$$6 < \frac{400}{59} < 7,$$

entonces hay una persona que asiste a al menos 7 reuniones. Las 9 restantes que asisten a cada una de estas 7 reuniones, solo pueden asistir a una de ellas, de modo que hay al menos $64 = 63 + 1$ personas en el claustro. ¡Contradicción!

Nota. Con el primer argumento se puede probar que $n \geq 61$, mientras con el segundo, se obtiene que $n \geq 64$. Este problema apareció en la Olimpiada de la URSS de 1965.

- 63.** Se dan 2019 conjuntos, cada uno contiene 45 elementos. Dos conjuntos cualesquiera tienen exactamente un elemento común. Probar que hay un elemento común a todos los conjuntos.

SOLUCIÓN. Sea A uno de los 2019 conjuntos. Entonces hay 2018 conjuntos restantes. Como

$$44 < \frac{2018}{45} \Leftrightarrow 1980 < 2018,$$

al menos uno de los elementos de A , digamos x , está en otros 45 conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_{45}$ (¡Principio del palomar!). Si estos fueran los 2018 conjuntos restantes, la solución estaría concluida. Supongamos, para obtener una contradicción, que uno de ellos B no contiene a x . Como B tiene un elemento común con A y $A_1, A_2, \dots, A_{45}$, y este elemento no puede ser x , B tendría al menos 46 elementos. ¡Contradicción!

Ideas: La relación entre el número de conjuntos n y la cantidad de elementos k que tiene cada uno de ellos es

$$k - 1 < \frac{n - 1}{k}$$

para poder asegurar que hay un elemento común a todos los conjuntos. Este problema, con un ligero cambio, apareció en la Olimpiada de Austria-Polonia, 1978.

- 64.** Se tienen 2019 puntos en el plano y tres de ellos cualesquiera no están en una recta. Si cada punto se une con otros 1010 por un segmento, probar que tres de ellos forman un triángulo.

SOLUCIÓN. Sean dos puntos p_1, p_2 cualesquiera conectados por un segmento. Sean A y B los restantes puntos conectados con p_1 y p_2 , respectivamente. Entonces $|A| = 1009$, $|B| = 1009$. Además, por principio de inclusión-exclusión,

$$2017 \geq |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2(1009) - |A \cap B|$$

por tanto, $|A \cap B| \geq 1$.

- 65.** Se colocan $2n + 1$ fichas blancas y negras en una fila ($n \geq 1$). Se dice que una ficha está *equilibrada* si el número de fichas blancas a su izquierda más el número de fichas negras a su derecha es n . Prueba que cualquiera sea la distribución de fichas, la cantidad de fichas equilibradas es impar.

SOLUCIÓN. Numeramos las fichas de 1 hasta $2n + 1$. Sea $E(j)$ la suma de la cantidad de fichas blancas que hay a la izquierda y de la cantidad de fichas negras que hay a la derecha de la ficha que ocupa la posición j . La ficha j está equilibrada si y sólo si $E(j) = n$.

Si las fichas que están en las posiciones j y $j + 1$ son de diferentes colores, entonces $E(j) = E(j + 1)$. En efecto, si las fichas que están en esas posiciones son negra y blanca, respectivamente, entonces ellas no cuentan al calcular los valores $E(j)$ y $E(j + 1)$. Si son blanca y negra respectivamente, entonces también $E(j) = E(j + 1)$.

Veamos que ocurre con la paridad de la número de fichas equilibradas cuando intercambiamos las fichas que ocupan las posiciones j y $j + 1$. Si las fichas que ocupan la posición j y $j + 1$ diferentes colores, entonces al intercambiarlas seguirán habiendo en esas posiciones fichas de diferente color, los valores $E(j)$ seguirán siendo iguales. El resto de las fichas i mantienen su valor de $E(i)$. De donde la paridad de la cantidad de fichas equilibradas se mantiene también cuando intercambiamos fichas de diferente color.

Por los razonamientos anteriores, dada una distribución de a fichas negras y b fichas blancas, con $a + b = 2n + 1$, podemos hacer hacer una permutación de las fichas de diferentes color de modo que las primeras a fichas sean negras y las siguientes b sean blancas. Como $a + b = 2n + 1$, se tiene que uno de estos dos valores es mayor o igual que $n + 1$ y el otro menor o igual que n . Supongamos que $a \leq n$, $b \geq n + 1$. Entonces la única pieza equilibrada es la que ocupa la posición $2n + 1$ porque el resto tiene un valor menor o igual que $n - 1$. De forma análoga ocurre si $a \geq n + 1$ y $b \leq n$. En este caso, la única ficha equilibrada es la ficha negra que ocupa la posición $n + 1$ contando hacia la izquierda a partir de la ficha negra que ocupa la posición más a la derecha.

Nota. Este problema apareció en la Olimpiada Matemática Española de 2018.

- 66.** 2018 matemáticos participan en un congreso. Cada uno de ellos ha colaborado con al menos 1347 de los restantes. Probar que se pueden encontrar 4 matemáticos de modo que dos cualesquiera de ellos han colaborado.

SOLUCIÓN. Construimos un grafo donde los vértices son los matemáticos y se unen por aristas entre ellos si han colaborado. Sean v_1 y v_2 dos vértices (dos matemáticos) que estén unidos (que han colaborado entre sí). Sean A y B el conjunto de vértices que están unidos a v_1 y v_2 que no incluyen al otro. Entonces

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \geq 2 \times 1346 - 2018 = 674.$$

De modo que se puede hallar un vértice v_3 (realmente al menos 674) unido a v_1 y v_2 . Sea C el conjunto de los vértices que están unidos a v_3 distintos de v_1 y v_2 , entonces

$$\begin{aligned} 2018 &\geq |(A \cap B) \cup C| = |A \cap B| + |C| - |A \cap B \cap C| \\ &\Rightarrow |A \cap B \cap C| \geq |A \cap B| + |C| - 2018 \geq 674 + 1345 - 2018 = 1. \end{aligned}$$

De modo que existe un vértice v_4 que está unido a v_1, v_2, v_3 . Es decir, los matemáticos que representan los vértices v_1, v_2, v_3, v_4 han colaborado.

- 67.** 17 personas intercambian correos electrónicos entre ellas (cada una con las 16 restantes). En cada intercambio de correos electrónicos se trata exactamente uno de tres temas. Probar que hay al menos tres personas cuyos correos electrónicos tratan de un mismo tema.

SOLUCIÓN. Sean A, B, C los temas que se tratan. Como cada persona intercambia con otras 16, y hay 3 temas, por el principio del palomar, ella trata el mismo tema con al menos 6 personas, digamos que es el tema A . Si entre esas 6 personas hay dos que tratan el tema A , entonces el problema está resuelto. Supongamos que en los e-mails entre las 6 personas se tratan los temas B y C . Entonces, por el teorema de Ramsey, hay tres que escriben sobre el tema B o tres que escriben sobre el tema C . Es decir, hay tres que tratan el mismo tema.

Nota. Este problema apareció en la Olimpiada Internacional de Matemática celebrada en Moscú en el año 1964. El caso $R(3, 3)$ que se estudió en la introducción apareció en la Olimpiada de Hungría de 1947, y también en la Putnam de 1953.

- 68.** Se tienen n estudiantes ($n \geq 4$) de modo que dados tres de ellos cualesquiera hay dos que se conocen y dados 4 hay dos que no se conocen entre sí. Hallar el mayor valor de n para el cual existe una relación como la anterior.

SOLUCIÓN. Si $n = 8$, y consideramos que el estudiante i conoce al estudiante j si y sólo si $|i - j| \not\equiv 1, 4$, entonces se cumple la afirmación del problema. En la figura 1 tenemos un grafo de 8 vértices, que corresponden a ocho estudiantes y las aristas negras o rojas corresponden a si los estudiantes se conocen o no, respectivamente. Cada estudiante está unido a su vecino y al diametralmente opuesto por una arista roja y el resto de aristas son negras. Esto lleva a observar fácilmente que en dicha figura todo triángulo tiene al menos una arista negra (e incluso hay triángulos cuyas tres aristas son negras) y todo cuadrilátero tiene al menos una arista roja.

Veamos que cuando $n = 9$ no existe una relación como la planteada en el problema. Para obtener una contradicción, supongamos que en cada trío hay 2 que se conocen y en cada cuarteto, 2 que no se conocen.

Un estudiante A no puede conocer a otros 6, porque dentro de estos 6 hay tres que se conocen o tres que no se conocen (problema de Ramsey), esto último no es posible, pero

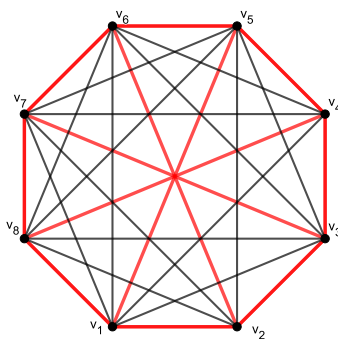


Figura 1: Los vértices v_i representan los estudiantes y la arista v_i, v_j es roja si $|i - j| \equiv 1 \text{ ó } 4 \pmod{9}$, que corresponde a que los estudiantes no se conocen, en otro caso la arista es negra.

tampoco que tres se conozcan porque unidos al estudiante A tendríamos 4 en los que no hay dos que no se conocen.

También puede haber un estudiante A que no conozca a otros 4, porque entre ellos habría dos estudiantes que no se conocen, que unidos al estudiante A , se tendría un trío donde ninguna pareja se conoce.

O sea, cada estudiante conoce exactamente a otros cinco. Por tanto, la suma de los estudiantes que conoce cada uno de ellos es $45 = 9 \times 5 = 45$, que es un número impar, pero si A conoce a B , entonces B conoce a A . De modo que cada pareja que se conoce se cuenta dos veces cuando contamos todas las personas que conoce cada estudiante.

Nota. Puede ser útil la interpretación del caso $n = 9$ en un grafo completo bicolor. El valor hallado en el problema coincide con $R(3, 4) - 1$. Este problema apareció en la Olimpiada de Matemática para el oeste de China del año 2005.