Seminario de problemas. Curso 2017-18. Solución, hoja 7 (Polinomios)

47. Sea $p \in \mathbb{Z}[x]$. Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ son distintos y cumplen que $p(a) = p(b) = p(c) = -1$, entonces p no tiene ceros enteros.

Solución. Tenemos que

$$p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)q(x) - 1,$$

para cierto $q \in \mathbb{Z}[x]$. Supongamos que $d \in \mathbb{Z}$ es una raíz de p. Entonces

$$1 = (d-a)(d-b)(d-c)q(d).$$

Luego $d-a, d-b$ y $d-c$ son tres divisores distintos de 1. Esto es una contradicción ya que los únicos divisores de 1 son ± 1. Por tanto, p no puede tener raíces enteras.

48. Probar que el polinomio $1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots + x^{2n}/(2n)!$ no tiene ceros reales.

Solución. Sea $f(x) = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots + x^{2n}/(2n)!$. Notar que

$$f(x) = f'(x) + \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{$\star$}$$

Como f es un polinomio de grado par con coeficiente principal positivo, tiene un mínimo absoluto, digamos en $x = a \in \mathbb{R}$. Por tanto, $f'(a) = 0$. Usando la ecuación ($\star$) obtenemos que $f(a) = a^{2n}/(2n)!$. Observar que $a \neq 0$ ya que $f(0) = 1$. Entonces $f(x) \geq f(a) = a^{2n}/(2n)! > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

49. Sea $f \in \mathbb{Z}[x]$. Probar que si $f(0)$ y $f(1)$ son impares, entonces f no tiene ceros enteros.

Solución. Supongamos que $a \in \mathbb{Z}$ es un cero de f. Entonces $f(x) = (x-a)g(x)$ para cierto $g \in \mathbb{Z}[x]$. Luego $f(0) = -ag(0)$ y $f(1) = (1-a)g(1)$. Como $-a$ y $1-a$ son dos enteros consecutivos, uno de ellos es par. Luego o bien $f(0)$ es par o bien $f(1)$ es par, lo cual es una contradicción.

50. Probar que si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ son distintos, entonces $(x-a_1)\cdots(x-a_n) - 1$ es irreducible.

Solución. Supongamos que $(x-a_1)\cdots(x-a_n) - 1 = f(x)g(x)$, con $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ de grado mayor o igual que 1. Equivalentemente, f y g tienen grado menor o igual que $n-1$. Para $i = 1, \ldots, n$ tenemos que $f(a_i)g(a_i) = -1$. Es decir, $f(a_i) = -g(a_i) = \pm 1$. Entonces $f + g$ es un polinomio de grado menor o igual que $n-1$ con n raíces $(a_1, \ldots, a_n)$, luego es el polinomio nulo. Es decir, $g = -f$ y por tanto

$$(x-a_1)\cdots(x-a_n) - 1 = -[f(x)]^2.$$

Sin embargo, el coeficiente de x^n en el polinomio de la izquierda es positivo mientras que en el de la izquierda es negativo, lo cual es una contradicción.

51. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ distintos y sea $P \in \mathbb{Z}[x]$. Probar que las condiciones

$$P(a) = b, \quad P(b) = c, \quad P(c) = a$$

no se pueden satisfacer simultáneamente.

Solución. De los enteros a, b, c elegimos los dos que tienen mayor diferencia en valor absoluto, digamos $|a-c|$. Entonces $|a-b| < |a-c|$. Como $P(a) = b$, tenemos que

$$P(x) - b = (x-a)Q(x),$$

para cierto $Q \in \mathbb{Z}[x]$. Evaluando en $x = c$ y usando que $P(c) = a$, tenemos que $a - b = (c-a)Q(c)$. Pero esto implica que $|a-b| \geq |a-c|$, lo cual es una contradicción.

52. Sea $f(x) = (x^{2018} + x^{2017} + 2)^{2019} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Hallar

$$a_0 - a_1/2 - a_2/2 + a_3 - a_4/2 - a_5/2 + a_6 - \cdots .$$

Solución. Sea $\omega = e^{i2\pi/3}$. Entonces es fácil comprobar que

$$a_0 - a_1/2 - a_2/2 + a_3 - a_4/2 - a_5/2 + a_6 - \cdots = \frac{f(\omega) + f(\omega^2)}{2} = 1.$$

53. Sean x_1, x_2 las raíces del polinomio $x^2 - 6x + 1$. Probar que $x_1^n + x_2^n$ es un entero no divisible por 5, para todo entero no negativo n.

Solución. Por Vieta sabemos que $x_1 + x_2 = 6$ y $x_1 x_2 = 1$. Además, si $n \geq 2$ tenemos que

$$x_1^n + x_2^n = (x_1 + x_2)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_1 x_2 (x_1^{n-2} + x_2^{n-2}).$$

Poniendo $s_n := x_1^n + x_2^n$, tenemos que

$$s_n = 6s_{n-1} - s_{n-2}, \quad s_0 = 2, s_1 = 6.$$

Queremos probar que s_n es un entero que no es múltiplo de 5 para todo $n \geq 0$. Está claro que la recurrencia siempre nos dará números s_n enteros. Escribiendo la sucesión $\{s_n\}$ módulo 5 obtenemos

$$\{2, 1, 4, 3, 4, 1, 2, 1, \ldots\}$$

Como el par $(2, 1)$ se repite, el resto de la sucesión también se repetirá periódicamente (el periodo será $\{2, 1, 4, 3, 4, 1\}$), ya que cada término queda completamente determinado por los dos anteriores. Como no aparece nunca ningún 0, deducimos que s_n nunca es múltiplo de 5.

54. Sea $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ para cierto entero $n > 1$. Probar que f es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.

Solución. Podemos usar el Criterio de Eisenstein con $k = n - 2$ y $p = 3$. Deducimos así que f tiene un factor irreducible de grado mayor o igual que $n - 1$. Como f no tiene raíces enteras (luego tampoco raíces racionales), obtenemos que f es irreducible.

55. Sean $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios de grado mayor o igual que 1. Sean

$$P_k := \{z \in \mathbb{C} : P(z) = k\}, \quad Q_k := \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = k\}.$$

Si $P_0 = Q_0$ y $P_1 = Q_1$, probar que $P(z) \equiv Q(z)$.

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $n = \deg P \geq \deg Q$, y sean

$$P_0 = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}, \quad P_1 = \{z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_{k+m}\}.$$

Los polinomios P y Q coinciden en los $k+m$ puntos $z_1, z_2, \dots, z_{k+m}$, luego bastará probar que $k+m > n$. Por hipótesis,

$$P(x) = (x-z_1)^{\alpha_1} \cdots (x-z_k)^{\alpha_k} = (x-z_{k+1})^{\alpha_{k+1}} \cdots (x-z_{k+m})^{\alpha_{k+m}} + 1,$$

para ciertos enteros positivos $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+m}$. Consideremos ahora $P'(x)$. Como sabemos, es divisible por $(x-z_i)^{\alpha_i - 1}$ para $i = 1, 2, \dots, k+m$. Es decir,

$$\prod_{i=1}^{k+m} (x-z_i)^{\alpha_i - 1} \mid P'(x).$$

Por tanto, $2n - k - m = \deg \prod_{i=1}^{k+m} (x-z_i)^{\alpha_i - 1} \leq \deg P' = n-1$; es decir, $k+m \geq n+1$, como queríamos demostrar.