

Seminario de problemas Curso 2025-26. Hoja 6

44. Si $x \geq 1$, prueba que $x^{1013} - \frac{1}{x^{1012}} \geq 2025(x - 1)$.

Solución.

Factorizando el primer miembro de la desigualdad, se tiene

$$x^{1013} - \frac{1}{x^{1012}} = \frac{x^{2025} - 1}{x^{1012}} = \frac{(x - 1)(x^{2024} + x^{2023} + \dots + x + 1)}{x^{1012}}.$$

Si excluimos el caso $x = 1$ para el cual la desigualdad es trivial, cuando $x > 1$, podemos dividir ambos lados de la desigualdad por $x - 1$, y obtenemos

$$x^{2024} + x^{2023} + \dots + x + 1 \geq 2025x^{1012} \Leftrightarrow \frac{x^{2024} + x^{2023} + \dots + x + 1}{2025} \geq x^{1012}.$$

Aplicando la desigualdad entre la media aritmética y geométrica

$$\frac{x^{2024} + x^{2023} + \dots + x + 1}{2025} \geq \sqrt[2025]{x^{2024}x^{2023} \dots x} = x^{1012},$$

que es justo lo que queríamos probar.

45. Si $a, b, c \geq 0$ son tales que $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 8$, prueba que $abc \leq 1$.

Solución.

Aplicando la desigualdad entre la media aritmética y geométrica en cada uno de los factores, se tiene

$$\frac{a + 1}{2} \geq \sqrt{a}, \quad \frac{b + 1}{2} \geq \sqrt{b}, \quad \frac{c + 1}{2} \geq \sqrt{c}.$$

Por tanto, $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 8\sqrt{abc}$. Puesto que $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 8$, se sigue que

$$\sqrt{abc} \leq 1$$

y, como $a, b, c \geq 0$, resulta $abc \leq 1$.

46. Sean a, b, c , números reales positivos que verifican

$$\frac{1}{3} \leq ab + ac + bc \leq 3.$$

Determina el rango de valores que puede tomar el producto abc .

Solución.

Por la desigualdad entre la media aritmética y geométrica

$$1 \geq \frac{ab + ac + bc}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \leq 1.$$

Por otra parte, al ser los números positivos, está claro que $abc > 0$. Veamos que esa cota no se puede mejorar. En efecto, si tomamos $a = b = 1$, entonces

$$\frac{1}{3} \leq 1 + 2c \leq 3,$$

por lo que podemos tomar c tan pequeño como queramos. Como, en este caso, $abc = c$, el producto se puede hacer tan pequeño como queramos. Así pues

$$0 < abc \leq 1.$$

47. Sean a, b, c números positivos. Prueba que

a) $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$

b) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$

Solución.

a) Por la desigualdad entre la media aritmética y geométrica, para cada uno de los sumandos de la parte derecha de la desigualdad, se tiene

$$a^2b = \sqrt[3]{a^3 \cdot a^3 \cdot b^3} \leq \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3}$$

$$b^2c = \sqrt[3]{b^3 \cdot b^3 \cdot c^3} \leq \frac{b^3 + b^3 + c^3}{3}$$

$$c^2a = \sqrt[3]{c^3 \cdot c^3 \cdot a^3} \leq \frac{c^3 + c^3 + a^3}{3}$$

Por tanto,

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} + \frac{b^3 + b^3 + c^3}{3} + \frac{c^3 + c^3 + a^3}{3} = a^3 + b^3 + c^3.$$

Veamos otra manera de llegar al mismo resultado. Supongamos los números ordenados, $a \geq b \geq c$, por lo que $a^2 \geq b^2 \geq c^2$, al ser todos ellos positivos. Entonces, por la desigualdad del reordenamiento,

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Se puede ver que el resultado no depende de la ordenación que hemos tomado de los números a, b, c .

b) Esta desigualdad se conoce como desigualdad de Nesbitt y hay diferentes maneras de probarla. Vemos una de ellas, usando la desigualdad entre la media armónica y la media aritmética. Para ello, notemos que podemos escribir la parte izquierda como

$$\frac{a+b+c-(b+c)}{b+c} + \frac{b+c+a-(c+a)}{c+a} + \frac{c+a+b-(a+b)}{a+b}.$$

Descomponiendo cada una de las fracciones en dos, llegamos a

$$(a+b+c) \left[\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right] - 3.$$

Por la desigualdad entre la media armónica y la media aritmética

$$\frac{3}{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}} \leq \frac{(b+c) + (c+a) + (a+b)}{3} = \frac{2}{3}(a+b+c).$$

De aquí resulta

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Por lo tanto,

$$(a+b+c) \left[\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right] - 3 \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

y la desigualdad queda probada.

- 48.** Prueba que $3^n + 2 \cdot 17^n$, con n un entero no negativo, no puede ser nunca un cuadrado perfecto.

Solución.

Probemos con los primeros valores de n .

- $n = 0$: $3^0 + 2 \cdot 17^0 = 3$.
- $n = 1$: $3^1 + 2 \cdot 17^1 = 37$.
- $n = 2$: $3^2 + 2 \cdot 17^2 = 587$.
- $n = 3$: $3^3 + 2 \cdot 17^3 = 9853$.

Parece que los números acaban en 3 o en 7. A partir de aquí, hay varias formas de atacar el problema. Podemos fijarnos en la última cifra de las potencias de 3 y de las potencias de 17. Así,

$$3^0 \equiv 1, \quad 3^1 \equiv 3, \quad 3^2 \equiv 9, \quad 3^3 \equiv 7, \quad 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

por lo que las potencias de 3 acaban en 1, 3, 9, 7, repitiéndose otra vez la secuencia. Para las potencias de 17 tenemos

$$17^0 \equiv 1, \quad 17^1 \equiv 7, \quad 17^2 \equiv 9, \quad 17^3 \equiv 3, \quad 17^4 \equiv 1 \pmod{10},$$

por lo que ahora es el ciclo 1, 7, 9, 3 el que se repite. Por tanto, para $3^n + 2 \cdot 17^n$ la última cifra seguirá también un patrón que se repite de cuatro en cuatro, acabando en 3, 7, 7, 3. Como ningún cuadrado acaba en 3 o 7, los números dados no pueden ser cuadrados perfectos.

Podemos trabajar con aritmética modular. La cuestión es elegir bien el módulo. Si empezamos con módulo 4, todo cuadrado es congruente con 0 o con 1 módulo 4, entonces

$$3^n + 2 \cdot 17^n \equiv (-1)^n + 2 \pmod{4},$$

por lo que para ser un cuadrado perfecto n tiene que ser impar. Si trabajamos ahora módulo 5, teniendo en cuenta que n es impar, resulta que

$$3^n + 2 \cdot 17^n \equiv (-2)^n + 2 \cdot 2^n \equiv 2^n(2 + (-1)^n) \equiv 2^n \pmod{5}.$$

Pero $2^n \pmod{5}$ es congruente o con 2 o con 3. Como los números que nos dan son impares, solo pueden acabar en 3 o en 7 y con esto concluimos.

49. Para cada entero positivo, se define la función f de la siguiente manera:

$$f(1) = 2025, \quad f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n).$$

Calcula el valor de $f(2025)$.

Solución.

Vamos a ir calculando los valores de f para $n = 2, 3, \dots$, con el fin de ver si encontramos un patrón. Así,

$$f(1) + f(2) = 2^2 f(2) \Rightarrow f(2) = \frac{1}{2^2 - 1} f(1).$$

Ahora,

$$f(3) = \frac{1}{3^2 - 1} (f(1) + f(2)) = \frac{1}{3^2 - 1} \left(f(1) + \frac{1}{2^2 - 1} f(1) \right) = \frac{2^2}{(3^2 - 1)(2^2 - 1)} f(1).$$

No es difícil ver que

$$f(4) = \frac{2^2 \cdot 3^2}{(4^2 - 1)(3^2 - 1)(2^2 - 1)} f(1).$$

Probaremos por inducción que

$$f(n) = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdots (n-1)^2}{(n^2 - 1) \cdots (3^2 - 1)(2^2 - 1)} f(1).$$

Ahora bien, la expresión anterior se puede simplificar, teniendo en cuenta que $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$, de manera que llegamos a

$$f(n) = \frac{2}{n(n+1)} f(1) = 2f(1) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Suponiendo que $f(n)$ viene dado por la expresión anterior, veamos que

$$f(n+1) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} f(1).$$

En efecto,

$$f(n+1) = \frac{1}{(n+1)^2 - 1} (f(1) + f(2) + \cdots + f(n))$$

y, por la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \frac{f(1)}{(n+1)^2 - 1} \left(1 + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \right) \\ &= \frac{f(1)}{(n+1)^2 - 1} \left(2 - \frac{2}{n+1} \right) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} f(1). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f(2025) = \frac{2}{2025 \cdot 2026} f(1) = \frac{2}{2025 \cdot 2026} 2025 = \frac{1}{1013}.$$

- 50.** En la sucesión 7, 76, 769, 7692, 76923, 769230, ..., el término n -ésimo está dado por los primeros n dígitos después del punto en la expresión decimal de $10/13 = 0.7692307692\dots$. Sabiendo que 769230 es múltiplo de 7, demuestra que, de los primeros 60 términos de la sucesión, al menos 40 tienen tres o más factores primos (se permiten factores primos repetidos; por ejemplo, $76 = 2 \times 2 \times 19$ tiene tres factores primos).

Solución.

De la expresión decimal de $10/13$, vemos que se trata de un número decimal periódico puro. Además el periodo es de longitud 6. Esto es

$$\frac{10}{13} = 0.\overline{769230}.$$

Denotemos por x al periodo de la fracción. Entonces, escribiendo los términos de la sucesión por columnas, resulta

$$\begin{array}{cccccc} 7 & 76 & 769 & 7692 & 76923 & 769230 \\ x7 & x76 & x769 & x7692 & x76923 & x769230 \\ xx7 & xx76 & xx769 & xx7692 & xx76923 & xx769230 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Observemos que todos los números de las columnas segunda y cuarta son múltiplos de 4, ya que sus dos últimas cifras son múltiplo de 4. Por lo tanto, son números de la forma $2 \cdot 2 \cdot a$, con $a > 1$, y tienen al menos tres factores primos. Por otra parte, los números de la última columna son múltiplos de 10, por lo que son de la forma $2 \cdot 5 \cdot b$, con $b > 1$ y también tienen tres factores primos, por lo menos. Fijándonos ahora en la quinta columna, vemos que se trata de múltiplos de 9, ya que $7 + 6 + 9 + 2 + 3 = 27$, por lo que son de la forma $3 \cdot 3 \cdot c$, con $c > 1$.

Considerando los 60 primeros términos de la sucesión, el razonamiento anterior nos proporciona 40 números con al menos tres factores primos, ya que en cada columna hay 10 números.

Se puede ir más allá y probar que hay otros 9 números más que tienen tres o más factores primos. Para encontrarlos, la clave está en la primera columna. Por la información que nos dan, al ser x múltiplo de 7, todos los números en dicha columna lo son. La cuestión es saber si tienen más factores primos. Aquí juega un papel importante el saber cómo están generados los términos de la sucesión. De hecho, 7 es el cociente de 100 dividido por 13. Como el resto de la división es 9, podemos poner

$$7 = \frac{100 - 9}{13}.$$

Con esto, los siguientes términos en la columna son igual a

$$x7 = \frac{10^8 - 9}{13}, \quad xx7 = \frac{10^{14} - 9}{13}, \quad xxx7 = \frac{10^{20} - 9}{13}, \quad \dots, \quad \overbrace{xx \cdots x}^{k \text{ veces}} 7 = \frac{10^{6k+2} - 9}{13}.$$

Observemos que los numeradores son una diferencia de cuadrados, por lo que

$$\overbrace{xx \cdots x}^{k \text{ veces}} 7 = \frac{10^{6k+2} - 9}{13} = \frac{(10^{3k+1} - 3)(10^{3k+1} + 3)}{13}.$$

Al menos uno de los dos factores del numerador es divisible por 7 pero, como para $k \geq 1$, estos factores son mayores que 7, podemos asegurar que para $k \geq 1$ todos los números tienen al menos tres factores primos. Es decir, salvo el 7, todos los números de la primera columna tienen tres factores primos como mínimo. A partir de aquí se concluye que entre los 60 primeros términos hay al menos 49 con tres o más factores primos.