

- 54.** Sean α, β las raíces del polinomio $x^2 - 6x + 1$. Si $r_n = \alpha^n + \beta^n$, $n \geq 0$, prueba que, para $n \geq 2$, se cumple $r_n = 6r_{n-1} - r_{n-2}$. Prueba, además, que r_n no es divisible por 5.

Solución.

Por ser α y β raíces del polinomio, se verifica

$$\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0, \quad \beta^2 - 6\beta + 1 = 0. \quad (1)$$

De aquí se deduce que

$$\alpha^2 = 6\alpha - 1, \quad \beta^2 = 6\beta - 1.$$

Sumando estas expresiones se tiene $\alpha^2 + \beta^2 = 6(\alpha + \beta) + 2$. Es decir, $r_2 = 6r_1 - r_0$. Por otra parte, multiplicando por α^k y β^k las ecuaciones (1) y sumándolas, resulta la recurrencia buscada

$$r_n = 6r_{n-1} - r_{n-2}.$$

Por último, $r_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 2$ y, de las relaciones de Cardano-Vieta, $r_1 = \alpha + \beta = 6$. Tomado congruencias módulo 5,

$$r_0 \equiv 2 \pmod{5}, \quad r_1 \equiv 1 \pmod{5}, \quad r_n \equiv r_{n-1} - r_{n-2} \pmod{5},$$

de donde se sigue que r_n no puede ser congruente con 0 módulo 5 o, lo que es lo mismo, r_n no es divisible por 5.

- 55.** Dado el polinomio $p(x) = x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square$, en el que cada cuadrado $\square$ representa un hueco donde se coloca un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: alternativamente, el primer y segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar los cuatro huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero. Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.

Solución.

Si el primer amigo quiere ganar, intentará que este polinomio tenga el menor número de raíces enteras. Como las raíces enteras de un polinomio son divisores del término independiente, debería elegir este coeficiente 1 o -1 , para que las únicas raíces enteras posibles sean 1 y -1 . Si el polinomio se escribe como

$$p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

entonces $p(1) = 0$ si $1 + a + b + c + d = 0$ y $p(-1) = 0$ si $1 - a + b - c + d = 0$.

Caso $d = 1$. En este caso, se debe cumplir $2 + a + b + c = 0$, $2 - a + b - c = 0$. Si el segundo jugador elige $b = -2$ ganaría el juego, ya que las ecuaciones anteriores se reducen a una sola: $a + c = 0$ y haga lo que haga luego el primer jugador el segundo ganaría. Así pues, el primer jugador no debe elegir $d = 1$.

Caso $d = 1$. Ahora se tiene, $a + b + c = 0$ y $-a + b - c = 0$, o lo que es lo mismo:

$$a + c = b, \quad a + c = -b.$$

Estas dos ecuaciones son incompatibles si $b \neq 0$. Como ninguno de los coeficientes puede ser nulo, ganará el primer jugador. Es decir, tiene estrategia ganadora, consistente en tomar $d = -1$.

- 56.** Calcula todos los polinomios con coeficientes reales tales que $xP(x-1) = (x-3)P(x)$.

Solución.

Tomando $x = 0$ y $x = 3$ se deduce que

$$-2P(0) = 0, \quad 3P(2) = 0.$$

Es decir, $x = 0$ y $x = 2$ son raíces del polinomio $P(x)$, por lo que existe un polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x) = x(x-2)Q(x).$$

Usando esta expresión para $P(x)$, la condición $xP(x-1) = (x-3)P(x)$ se escribe como

$$x(x-1)(x-3)Q(x-1) = (x-3)x(x-2)Q(x) \Rightarrow (x-1)Q(x-1) = (x-2)Q(x).$$

Ahora, tomamos $x = 1$ y $x = 2$, por lo que

$$-Q(1) = 0, \quad Q(1) = 0,$$

y $Q(x)$ tiene como raíz $x = 1$. Es decir, existe un polinomio $R(x)$ de tal manera que $Q(x) = (x-1)R(x)$. Sustituyendo esta expresión en la condición para $Q(x)$, resulta

$$(x-1)(x-2)R(x-1) = (x-2)(x-1)R(x) \Rightarrow R(x-1) = R(x).$$

Ahora bien, si $R(x) = R(x-1)$ este polinomio debe ser constante, pues de otra manera tendría infinitas raíces. Por tanto, $R(x) = C$ con C un número real arbitrario. Finalmente:

$$P(x) = x(x-2)Q(x) = x(x-1)(x-2)R(x) = Cx(x-1)(x-2), \quad C \in \mathbb{R}.$$

- 57.** Sean $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ cuatro números reales. Demuestra que existen $P(x)$ y $Q(x)$, polinomios de grado dos con coeficientes reales, tales que x_1, x_2, x_3 y x_4 son las raíces de $P(Q(x))$ si y solamente si $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

Solución.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que existen $P(x)$ y $Q(x)$, polinomios mónicos de segundo grado, verificando que x_1, x_2, x_3 y x_4 son las raíces de $P(Q(x))$. Entonces,

$$P(Q(x_1)) = P(Q(x_4)) = P(r_1) = 0, \quad P(Q(x_2)) = P(Q(x_3)) = P(r_2) = 0.$$

Sean r_1 y r_2 las dos raíces de $P(x)$. De lo anterior se sigue que

$$Q(x_1) = Q(x_4) = r_1, \quad Q(x_2) = Q(x_3) = r_2.$$

De la primera condición deducimos que $Q(x) = (x - x_1)(x - x_4) + r_1$. Análogamente, de la segunda condición, resulta $Q(x) = (x - x_2)(x - x_3) + r_2$. Por tanto,

$$Q(x) = x^2 - (x_1 + x_4)x + x_1x_4 + r_1, \quad Q(x) = x^2 - (x_2 + x_3)x + x_2x_3 + r_2.$$

Como la expresión de un polinomio es única, el coeficiente en x debe ser el mismo, por lo que $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

Supongamos ahora que $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$. Consideremos los polinomios de segundo grado

$$Q(x) = x^2 - (x_1 + x_4)x = x^2 - (x_2 + x_3)x, \quad P(x) = (x + x_1x_4)(x + x_2x_3)$$

por lo que

$$P(Q(x)) = (x^2 - (x_1 + x_4)x + x_1x_4)(x^2 - (x_2 + x_3)x + x_2x_3) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),$$

y $P(Q(x))$ se anula en x_1, x_2, x_3 y x_4 .

58. Si $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ y $S(x)$ son polinomios tales que

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)S(x),$$

demuestra que $P(x)$ es divisible por $x - 1$.

Solución.

Observemos que

$$(x - 1)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = x^5 - 1,$$

por lo que las raíces de $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ son las raíces de $x^5 - 1$, excepto $x = 1$. Se trata pues de las raíces quintas de la unidad distintas de 1. Si estas raíces son r_j , $j = 1, 2, 3, 4$, entonces

$$r_j = \cos \frac{2j\pi}{5} + i \sin \frac{2j\pi}{5}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

siendo i la unidad imaginaria. Además, para $j = 1, 2, 3, 4$, se verifica:

$$i) r_j^5 = 1, \quad ii) r_j = r_1^j.$$

Ahora podemos formar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} P(r_1^5) + r_1Q(r_1^5) + r_1^2R(r_1^5) &= (1 + r_1 + r_1^2 + r_1^3 + r_1^4 + r_1^5)S(r_1) = 0, \\ P(r_2^5) + r_2Q(r_2^5) + r_2^2R(r_2^5) &= (1 + r_2 + r_2^2 + r_2^3 + r_2^4 + r_2^5)S(r_2) = 0, \\ P(r_3^5) + r_3Q(r_3^5) + r_3^2R(r_3^5) &= (1 + r_3 + r_3^2 + r_3^3 + r_3^4 + r_3^5)S(r_3) = 0, \\ P(r_4^5) + r_4Q(r_4^5) + r_4^2R(r_4^5) &= (1 + r_4 + r_4^2 + r_4^3 + r_4^4 + r_4^5)S(r_4) = 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las propiedades $i)$ y $ii)$, se puede escribir el sistema como

$$\begin{aligned} P(1) + r_1Q(1) + r_1^2R(1) &= 0, \\ P(1) + r_1^2Q(1) + r_1^4R(1) &= 0, \\ P(1) + r_1^3Q(1) + r_1R(1) &= 0, \\ P(1) + r_1^4Q(1) + r_1^3R(1) &= 0, \end{aligned}$$

que podemos ver como un sistema homogéneo cuyas incógnitas son $P(1)$, $Q(1)$ y $R(1)$. Puesto que

$$\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 \\ 1 & r_1^2 & r_1^4 \\ 1 & r_1^3 & r_1 \end{vmatrix} = 2 - 2r_1^2 + r_1^3 - r_1^4 \neq 0,$$

se deduce que $P(1) = Q(1) = R(1) = 0$ y, por tanto, no solo $P(x)$ es divisible por $(x-1)$ sino que también lo son $Q(x)$ y $R(x)$.

- 59.** ¿Para qué valores de n el polinomio $1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2}$ es divisible por el polinomio $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$?

Solución.

Como en el problema anterior, podemos usar las identidades

$$1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2} = \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}, \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

De este modo, ambos polinomios son divisibles si el cociente entre ambos es otro polinomio, es decir si

$$\frac{1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2}}{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}} = \frac{\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}}{\frac{x^n - 1}{x - 1}} = \frac{(x^{2n} - 1)(x - 1)}{(x^n - 1)(x^2 - 1)}$$

es un polinomio. Ahora bien, la expresión anterior se puede simplificar, ya que

$$x^{2n} - 1 = (x^n - 1)(x^n + 1), \quad x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1),$$

y entonces

$$\frac{1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2}}{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}} = \frac{x^n + 1}{x + 1}.$$

Es evidente que, para que el cociente sea un polinomio, $x = -1$ tiene que ser una raíz de $x^n + 1$, lo que sucede siempre que n sea impar.

- 60.** Encuentra dos polinomios $F(x)$ y $G(x)$ tales que

$$(x^8 - 1)F(x) + (x^5 - 1)G(x) = x - 1.$$

Solución.

En primer lugar, observemos que podemos simplificar dividiendo por $(x-1)$ y queda

$$(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)F(x) + (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)G(x) = 1.$$

Ahora aplicamos el algoritmo de Euclides para encontrar el máximo común divisor de ambos polinomios, que intuimos va a ser 1. Para ello, procedemos a efectuar la división

$$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)x^3 + x^2 + x + 1,$$

por lo que

$$\text{mcd}(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1, x^4+x^3+x^2+x+1) = \text{mcd}(x^4+x^3+x^2+x+1, x^2+x+1).$$

Repetiendo el proceso de división hasta encontrar el último resto distinto de 0, resulta

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)x^2 + x + 1, \quad x^2 + x + 1 = (x + 1)x + 1,$$

por lo que el máximo común divisor es 1. Todo lo que queda por hacer ahora es expresar el máximo común divisor en términos de los polinomios originales, en lo que se conoce como identidad de Bezout. De la última división, se tiene

$$x^2 + x + 1 - (x + 1)x = 1. \quad (2)$$

De la división anterior, se tiene

$$x + 1 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - (x^2 + x + 1)x^2,$$

y, sustituyendo en (2), resulta

$$(x^2 + x + 1)(1 + x^3) - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)x = 1. \quad (3)$$

Por último, de la primera división obtenemos

$$x^2 + x + 1 = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)x^3$$

y, sustituyendo en (3), se tiene

$$(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 + 1) + (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(-x^6 - x^3 - x) = 1.$$

Así, los polinomios buscados son

$$F(x) = x^3 + 1, \quad G(x) = -x^6 - x^3 - 1.$$

Hay que hacer notar que estos polinomios no son únicos. De hecho, el conjunto de soluciones viene dado por

$$\begin{aligned} F(x) &= x^3 + 1 + (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)R(x), \\ G(x) &= -x^6 - x^3 - 1 - (x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)R(x), \end{aligned}$$

siendo $R(x)$ un polinomio arbitrario.