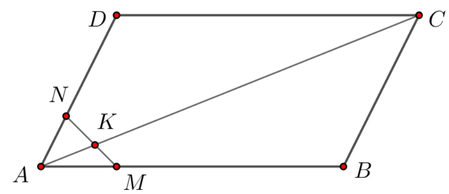
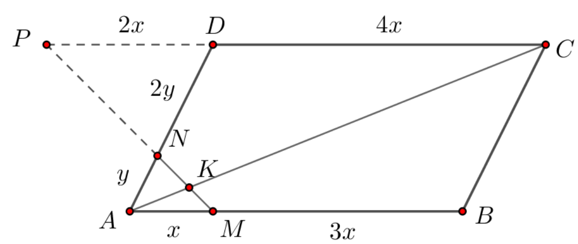
Seminario de problemas. Curso 2022-23. Hoja 6

41. $ABCD$ es un paralelogramo. M y N son puntos en los lados AB y AD, respectivamente, tales que $AB = 4AM$ y $AD = 3AN$. Sea K el punto de intersección de MN y AC. Determinar la razón AC/AK.



Solución (Tiago Bezerra, solución al problema MA164, *Crux Mathematicorum* (48) no. 8, octubre de 2022, págs. 449–450.)



Sean $AM = x$, $AN = y$, y sea P el punto de intersección de las rectas MN y CD. Por las condiciones enunciadas, $MB = 3x$, $ND = 2y$, $CD = 4x$ (ver la figura).

Los triángulos AMN y DPN son semejantes, entonces

$$\frac{PD}{AM} = \frac{ND}{NA} = \frac{2y}{y} = 2,$$

luego $PD = 2AM = 2x$.

Aplicando el *teorema de Menelao* al triángulo ACD cortado por la recta transversal MN, tenemos

$$1 = \frac{KA}{KC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{ND}{NA} = \frac{KA}{KC} \cdot \frac{6x}{2x} \cdot \frac{2y}{y},$$

de donde se deduce $KC = 6KA$. Entonces, finalmente,

$$\frac{AC}{AK} = \frac{AK + KC}{AK} = 7.$$

42. Sin usar nada de cálculo de derivadas, hallar el posible rango de valores del parámetro k para que la ecuación

$$(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = k$$

tenga cuatro soluciones distintas.

Solución.

Ponemos $P(x) = (x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7)$. Si sustituimos $x = u - 4$ queda

$$P(u) = (u - 3)(u - 1)(u + 1)(u + 3) = (u^2 - 1)(u^2 - 9).$$

La ecuación $P(u) = k$, es decir,

$$u^4 - 10u^2 + 9 - k = 0 \tag{1}$$

es bicuadrada. Las dos soluciones para u^2 son

$$u^2 = 5 \pm \sqrt{16 + k},$$

que son dos números reales distintos si $16 + k > 0$, es decir, si (y solo si) $k > -16$, y ambos estrictamente positivos si (y solo si) lo es el más pequeño,

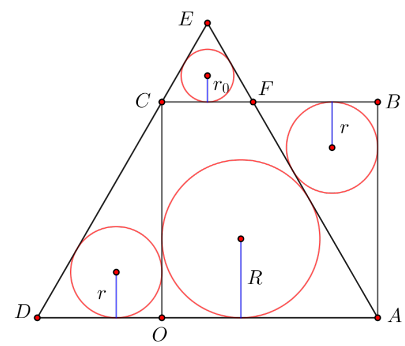
$$5 - \sqrt{16 + k} > 0,$$

es decir, si $\sqrt{16 + k} < 5$, o $k < 9$. De modo que **cuando (y solo cuando) k está en el intervalo** $(-16, 9)$, las cuatro soluciones de (1),

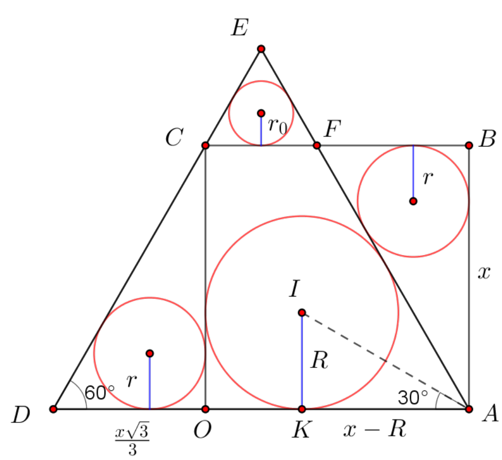
$$u_{1,2} = \pm\sqrt{5 + \sqrt{16 + k}} \quad \text{y} \quad u_{3,4} = \pm\sqrt{5 - \sqrt{16 + k}}$$

serán reales y distintas. Y lo mismo las cuatro soluciones $x_{1,2,3,4} = u_{1,2,3,4} - 4$ de $P(x) = k$.

43. En el diagrama adjunto, ADE es un triángulo equilátero. Los puntos O en el segmento DA y C en el segmento ED son tales que $OABC$ es un cuadrado. Denotamos con r el radio común de las circunferencias inscritas en los triángulos CDO y AFB, con r_0 el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ECF, y con R el radio de la circunferencia tangente a las rectas OA, AF y CO. Probar que $Rr_0 = r^2$.



Solución. (Emilian Sega, solución al problema MA165, *Crux Mathematicorum* (48) no. 8, octubre de 2022, págs. 450–451.)



Sea x el lado del cuadrado $OABC$ (ver la figura). El triángulo rectángulo CDO es la mitad de un triángulo equilátero de altura $CO = x$, luego $DO = x\sqrt{3}/3$ y $CD = 2x\sqrt{3}/3$. El semiperímetro de este triángulo es $s = (CO + OD + DC)/2 = x(1+\sqrt{3})/2$ y entonces, como es sabido,

$$r = s - CD = \frac{x(1+\sqrt{3})}{2} - \frac{2x\sqrt{3}}{3} = \frac{(3-\sqrt{3})x}{6} = \frac{(\sqrt{3}-1)x}{2\sqrt{3}}.$$

Por otra parte, se tiene también $BF = DO = x\sqrt{3}/3$, con lo que el lado del pequeño triángulo equilátero CFE es

$$CF = BC - BF = x - \frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{(3-\sqrt{3})x}{3},$$

y el radio de su circunferencia inscrita es

$$r_0 = \frac{1}{3}\frac{CF\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)x}{6}.$$

Además, si I es el centro de la circunferencia de radio R y K el punto de tangencia de esta circunferencia con OA, se tiene $AK = AO - OK = x - R$, y $\angle IAK = 30°$, luego $x - R = R\sqrt{3}$, de donde

$$R = \frac{x}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)x}{2}$$

y, finalmente,

$$Rr_0 = \frac{(\sqrt{3}-1)^2x^2}{12} = r^2,$$

como se quería ver.

44. Una granjera vende todas sus ovejas, cabras y vacas (tiene varios animales de cada especie). Una persona le ofrece 100 € por oveja, 200 € por cabra y 400 € por vaca, por un total de 4700 €. Otro comprador le ofrece 135 € por oveja, 265 € por cabra y 309 € por vaca, por un total de 5155 €. ¿Cuántas ovejas, cabras y vacas tiene la granjera?

Solución.

Vamos a llamar m, v y c, respectivamente, a los números de ovejas, cabras y vacas en cuestión. Los datos ofrecen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 100m + 200c + 400v = 4700 \\ 135m + 265c + 309v = 5155. \end{cases}$$

Simplificada, la primera ecuación es $m+2c+4v = 47$. Multiplicándola por 135 y restándole entonces la segunda ecuación, resulta $5c + 231v = 1190$. Queda el sistema

$$\begin{cases} 5c + 231v = 1190 \\ m + 2c + 4v = 47, \end{cases} \tag{2}$$

del que buscamos soluciones enteras (ecuaciones *diofánticas*). Para ello, en la primera ecuación despejamos la incógnita que tiene el coeficiente más pequeño,

$$c = \frac{1190 - 231v}{5} = 238 - \frac{231v}{5} = 238 - 231t$$

si ponemos que sea $v = 5t$. Así, por ejemplo para $t = 1$ quedan $v = 5$ y $c = 7$. De hecho, todas las soluciones enteras de la primera ecuación vienen entonces dadas por las expresiones

$$\begin{cases} c = 7 - 231k \\ v = 5 + 5k, \end{cases}$$

donde k es un número entero cualquiera. Sustituyendo estas expresiones en la segunda ecuación de (2) queda $m = 13 - 482k$. La única posibilidad para que sean positivos m, c y v es que sea $k = 0$. La solución es, entonces, $(m, c, v) = (13, 7, 5)$.

45. Consideramos la sucesión $1, 3, 2, -1, \ldots$, donde cada término es igual al precedente menos el anterior a éste. ¿Cuánto vale la suma de los 2023 primeros términos?

Solución.

Pongamos $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, y la *ley de recurrencia* $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ si $n \geq 1$ con la que se va construyendo la sucesión. Llamemos S a la suma que buscamos.

$$\begin{aligned} S &= 4 + \sum_{n=3}^{2023} a_n = 4 + \sum_{n=3}^{2023} (a_{n-1} - a_{n-2}) \\ &= 4 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{2021} - a_{2020}) + (a_{2022} - a_{2021}) \\ &= 4 - 1 + a_{2022} = 3 + a_{2022} \end{aligned}$$

(la suma es *telescópica*).

Calcularemos el término general a_n. La recurrencia es lineal de coeficientes constantes y homogénea. La ecuación característica de la recurrencia es $r^2 - r + 1 = 0$, con raíces $r = (1 \pm i\sqrt{3})/2$. Entonces el término general tendrá la forma

$$a_n = A\Big(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\Big)^n + B\Big(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\Big)^n \tag{3}$$

donde A y B son dos constantes que hay que determinar. Se puede considerar que debería ser $a_0 = -2$ para que la recurrencia se cumpla ya para el término a_2, es decir, que $a_2 = 3 = a_1 - a_0 = 1 - a_0$. Entonces, dando respectivamente a n en (3) los valores 0 y 1, se llega al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} A + B = -2 \\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2}A + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}B = 1, \end{cases}$$

etc.

Pero no hace falta tanto; si nos damos cuenta de que

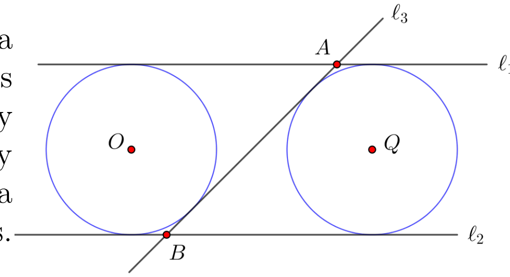
$$\Big(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\Big)^3 = \Big(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\Big)^3 = -1$$

(las raíces de la ecuación característica son las raíces cúbicas complejas de -1), entonces tendremos que

$$a_{2022} = A\Big(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\Big)^{2022} + B\Big(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\Big)^{2022} = (A + B)(-1)^{674} = A + B = -2$$

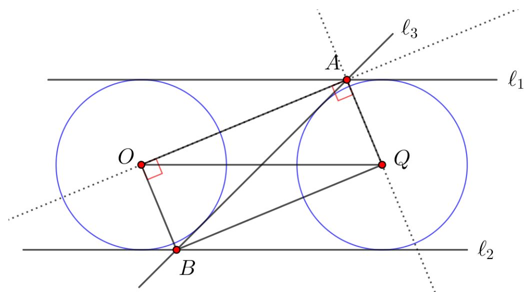
y así acabamos rápidamente: $S = 3 - 2 = 1$.

46. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas paralelas y sea ℓ_3 una recta secante que corta a ℓ_1 y a ℓ_2, respectivamente, en los puntos A y B. Dos circunferencias de centros O y Q están situadas entre las rectas paralelas, a uno y otro lado de la recta secante, de modo que cada una de las circunferencias es tangente a las tres rectas. Probar que $OQ = AB$.



Solución.

Los segmentos AO y AQ son perpendiculares porque cada uno pertenece a una de las dos bisectrices de las rectas ℓ_1 y ℓ_3. Análogamente, BO y BQ son perpendiculares. El cuadrilátero inscriptible $OBQA$ es un rectángulo, y sus diagonales OQ y AB son iguales.



47. Encontrar todos los polinomios $P(x)$ de coeficientes enteros no negativos que cumplen las condiciones $P(1) = 8$ y $P(2) = 2022$.

Solución.

Un polinomio que cumple las dos condiciones es

$$f(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2 + x$$

y, de los polinomios que solo tienen coeficientes 0 y 1, es el único que cumple $f(x) = 2022$ ($2022 = 11111100110_{(2}$, y la *representación de un número en base* 2 es única).

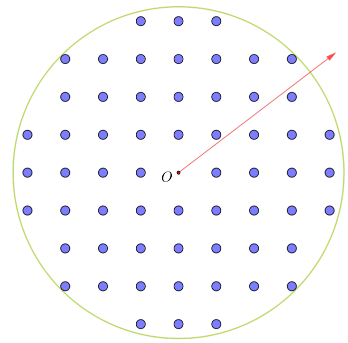
Sea otro polinomio $g(x) \neq f(x)$ tal que $g(2) = 2022$, y supongamos entonces que es mayor o igual que 2 el coeficiente de x^k en $g(x)$. Entonces definimos

$$h(x) = g(x) - 2x^k + x^{k+1}.$$

Se tendrá $h(2) = g(2) = 2022$, y $h(1) = g(1) - 1 < g(1)$, habiéndose disminuido en una unidad la suma original ($g(1)$) de los coeficientes de $g(x)$. Ahora podemos hacer lo mismo con $h(x)$, y así repetidamente, hasta llegar a un polinomio $q(x)$ que no tiene ya ningún coeficiente mayor que 1, que sigue cumpliendo $q(x) = 2022$ y tal que $q(1) < g(1)$.

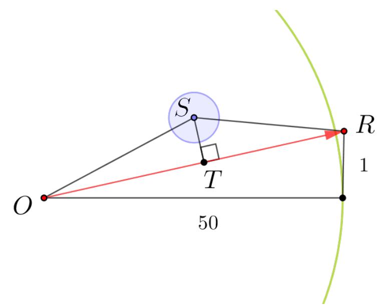
Pero entonces, por la unicidad, $q(x) = f(x)$ y, como $f(1) = q(1)$, resulta que sería $g(1) > 8$. Por lo tanto, el único polinomio que cumple las dos condiciones prescritas es $f(x)$.

48. En un huerto circular y llano con centro en $O = (0,0)$ y radio 50 hay plantados árboles en todos los puntos de coordenadas enteras, excepto en O donde hay un mirador circular. Se supone que todos los árboles son cilíndricos, con una sección circular del mismo tamaño. Cuando los árboles sean suficientemente finos no bloquearán totalmente la vista al exterior del huerto desde el mirador central, es decir, será posible trazar alguna semirrecta desde O que no toque ni atraviese ningún árbol. Probar que ocurre esto cuando el radio de los árboles es más pequeño que $1/\sqrt{2501}$.



Solución.

Suponemos entonces que si r es el radio común de los árboles, se tiene $r < 1/\sqrt{2501}$. Se puede probar que desde el mirador central O se puede ver el punto $R = (50, 1)$ exterior al huerto, es decir, que la semirrecta OR no corta ni toca ningún árbol.



El segmento OR no contiene otros puntos de malla que sus dos extremos, ya que la mínima ordenada positiva de un punto de malla es 1. Y su longitud es

$$OR = \sqrt{50^2 + 1^2} = 2501.$$

Sea S un punto de malla cualquiera dentro del huerto circular. El área del triángulo OSR, que es un triángulo con los vértices en la malla, es mayor o igual que $1/2$ porque, aplicando la *fórmula de Pick*,

$$\text{área}(\triangle OSR) = i + \frac{b}{2} - 1 \geq \frac{1}{2},$$

ya que el número de puntos interiores al triángulo es $i \geq 0$ y el número de puntos en el borde del triángulo, es decir, en los lados, incluidos ahí los vértices, es $b \geq 3$.

Por otra parte, sea T el pie de la perpendicular trazada por S a OR. Se cumple

$$\text{área}(\triangle OSR) = \frac{1}{2} OR \cdot ST \geq \frac{1}{2},$$

luego

$$ST \geq \frac{1}{OR} = \frac{1}{\sqrt{2501}} > r$$

y, por consiguiente, el árbol que tiene centro en S y radio r no llega a tocar la línea OR.