Seminario de problemas Curso 2017-18. Hoja 6 (Desigualdades)

40. Probar que de todos los cilindros circulares rectos de volumen V fijo, el que tiene diámetro igual a la altura es el de menor área.

SOLUCIÓN:

Sea r y h el radio y la altura, respectivamente, de un cilindro circular recto de área A y volumen V , con

$$A = 2\pi(r^2 + rh) \quad \text{y} \quad V = \pi r^2 h.$$

Vamos a utilizar la desigualdad GM-AM. Si la aplicamos de buenas a primeras tenemos

$$A = 2\pi(r^2 + rh) \leq 2\pi\sqrt{r^3 h} = 2\sqrt{\pi r V}.$$

La parte de la derecha no es fija ya que, a pesar de ser V fijo, crece cuando r crece y decrece cuando r decrece. Por tanto, necesitamos variar de algún modo los números involucrados en las medias. Así

$$\begin{aligned} A &= 2(\pi r^2 + \pi r h) = 2 \left(\pi r^2 + \frac{\pi r h}{2} + \frac{\pi r h}{2} \right) = \frac{6}{3} \left(\pi r^2 + \frac{\pi r h}{2} + \frac{\pi r h}{2} \right) \\ &\geq 6 \sqrt[3]{\frac{\pi^3 r^4 h^2}{4}} = 6 \sqrt[3]{\frac{\pi}{4} V^2}. \end{aligned}$$

Como vemos, la parte de la derecha es fija y por tanto el área será la menor cuando se cumpla la igualdad; esto es, cuando

$$\pi r^2 = \frac{\pi r h}{2} \iff h = 2r.$$

Es decir, el cilindro buscado es el que tiene el diámetro igual a la altura.

41. Sean a , b y c los lados de un triángulo. Probar la desigualdad de Nesbitt

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

SOLUCIÓN:

Transformamos la parte de la izquierda del siguiente modo

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{b+c} - 1 + \frac{b}{a+c} + \frac{a+c}{a+c} - 1 + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{a+b} - 1 \\ &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 \\ &= (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) - 3. \end{aligned}$$

Si en lugar de tener el factor $a+b+c$ tuviéramos $b+c+a+c+a+b$,

$$a+b+c = \frac{2(a+b+c)}{2} = \frac{a+b+c+a+b+c}{2} = \frac{b+c+a+c+a+b}{2}$$

luego la expresión anterior es igual a

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 = \frac{1}{2}(b+c+a+c+a+b) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) - 3$$

Ahora, reescribiendo la desigualdad HM-AM para n números como

$$\frac{n}{1/x_1 + \dots + 1/x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \iff n^2 \leq (x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

y utilizándola con $x_1 = b + c$, $x_2 = a + c$ y $x_3 = a + b$ tenemos

$$\frac{1}{2}(b + c + a + c + a + b) \left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{a + c} + \frac{1}{a + b} \right) - 3 \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2},$$

que es precisamente el resultado buscado.

42. Sean a y b números reales positivos tales que $a + b = 1$. Probar

$$\left(a + \frac{1}{a} \right)^2 + \left(b + \frac{1}{b} \right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

SOLUCIÓN:

A partir de la desigualdad AM-QM modificada para dos números

$$\frac{(x + y)^2}{2} \leq x^2 + y^2$$

tenemos que, tomando $x = a + 1/a$ e $y = b + 1/b$, obtenemos

$$\left(a + \frac{1}{a} \right)^2 + \left(b + \frac{1}{b} \right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2.$$

Utilizando ahora la desigualdad HM-AM modificada para dos números

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \frac{x + y}{2} \iff \frac{4}{x + y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

con $x = a$ e $y = b$, llegamos al resultado deseado

$$\left(a + \frac{1}{a} \right)^2 + \left(b + \frac{1}{b} \right)^2 \geq \left(1 + \frac{4}{a + b} \right)^2 = \frac{25}{2}.$$

43. Sean a, b, c los lados de un triángulo y A, B, C sus respectivos ángulos medidos en grados. Probar

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} < 90^\circ.$$

SOLUCIÓN:

Utilizando la desigualdad triangular con cada uno de los lados del triángulo tenemos

$$\begin{aligned} aA + bB + cC &= \frac{1}{2}(aA + bB + cC + aA + bB + cC) \\ &< \frac{1}{2}(aA + bB + cC + (b + c)A + (a + c)B + (a + b)C) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)(A + B + C), \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} < \frac{A + B + C}{2} = 90^\circ,$$

donde hemos utilizado el conocido hecho $A + B + C = 180^\circ$.

44. Prueba que para tres números reales cualesquiera x , y y z la desigualdad

$$|x| + |y| + |z| - |x + y| - |y + z| - |z + x| + |x + y + z| \geq 0$$

es siempre cierta.

SOLUCIÓN:

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|z|$ es el mayor de los números $|x|$, $|y|$ y $|z|$. Si $z = 0$ entonces la parte de la izquierda es nula y la desigualdad se cumple trivialmente. Si no, dividimos ambos lados entre $|z| \neq 0$ para obtener la desigualdad equivalente

$$\left| \frac{x}{z} \right| + \left| \frac{y}{z} \right| + 1 - \left| \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \right| - \left| \frac{y}{z} + 1 \right| - \left| 1 + \frac{x}{z} \right| + \left| \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1 \right| \geq 0.$$

Ahora, teniendo en cuenta que $|x| \leq |z|$ y $|y| \leq |z|$, tenemos

$$\left| \frac{x}{z} \right| \leq 1 \iff -1 \leq \frac{x}{z} \leq 1 \quad \text{y} \quad \left| \frac{y}{z} \right| \leq 1 \iff -1 \leq \frac{y}{z} \leq 1,$$

por lo que

$$0 \leq \frac{y}{z} + 1 = \left| \frac{y}{z} + 1 \right| \quad \text{y} \quad 0 \leq \frac{x}{z} + 1 = \left| \frac{x}{z} + 1 \right|.$$

De este modo, la desigualdad anterior puede reescribirse como

$$\left| \frac{x}{z} \right| + \left| \frac{y}{z} \right| - \left| \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \right| - \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1 \right) + \left| \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1 \right| \geq 0,$$

o, equivalentemente,

$$\left| \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \right| + \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1 \right) \leq \left| \frac{x}{z} \right| + \left| \frac{y}{z} \right| + \left| \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1 \right|.$$

Pero esta desigualdad se sigue sumando la desigualdad triangular y la del valor absoluto

$$\left| \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \right| \leq \left| \frac{x}{z} \right| + \left| \frac{y}{z} \right|, \quad \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1 \right) \leq \left| \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 1 \right|$$

45. Sean $a, b, c \geq 1$ reales. Probar que se cumple la desigualdad

$$\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{b^2 - 1} + \sqrt{c^2 - 1} \leq \frac{ab + bc + ac}{2}.$$

SOLUCIÓN:

Vamos a llamar $x = \sqrt{a^2 - 1}$, $y = \sqrt{b^2 - 1}$ y $z = \sqrt{c^2 - 1}$, por lo que $a = \sqrt{x^2 + 1}$, $b = \sqrt{y^2 + 1}$ y $c = \sqrt{z^2 + 1}$. De este modo la desigualdad a probar es

$$x + y + z = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)} + \sqrt{(1 + y^2)(1 + z^2)} + \sqrt{(1 + x^2)(1 + z^2)} \right).$$

Por otra parte, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)} \geq x + y,$$

y, análogamente,

$$\sqrt{(1 + y^2)(1 + z^2)} \geq y + z, \quad \sqrt{(1 + x^2)(1 + z^2)} \geq x + z.$$

Sumando estas tres desigualdades obtenemos el resultado deseado.

- 46.** Sea $P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ un polinomio de grado n con coeficientes positivos, es decir, $a_n, \dots, a_0 \geq 0$. Probar que si la desigualdad

$$P\left(\frac{1}{t}\right) \geq \frac{1}{P(t)}$$

es cierta para $t = 1$, entonces también es cierta para cualquier $t > 0$.

SOLUCIÓN:

Supongamos que $P(1) \leq \frac{1}{P(1)}$, es decir, $P(1)^2 \geq 1$. Para cada $t > 0$ consideramos el producto

$$P(t)P\left(\frac{1}{t}\right) = (a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0) \left(\frac{a_n}{t^n} + \frac{a_{n-1}}{t^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{t} + a_0\right)$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz con los valores $x_j = \sqrt{a_{j-1} t^{j-1}}$ e $y_j = \sqrt{a_{j-1} / t^{j-1}}$, para $j = 1, \dots, n+1$, obtenemos

$$P(t)P\left(\frac{1}{t}\right) \geq (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)^2 = P(1)^2 \geq 1,$$

que es equivalente a la desigualdad que buscamos.