Seminario de problemas. Curso 2016-17. Soluciones hoja 6

35. Sin ingenios informáticos, calcular la cifra que precede a la fila final de ceros en 25! .   (Recuerda: 25! = 1· 2 · 3 · 4 · ··· · 24 · 25)

Solución

Empezaremos por determinar cuántos ceros hay en la cola final de 25!. Habrá tantos como factores 5 (pues factores 2 los hay de sobra). Hay, pues 6 factores 5 provenientes de 5, 10, 15, 20 y 25 (este último aporta 2)

Ahora basta con jugar con las congruencias módulo 10 del número $n = \dfrac{25!}{10^6}$

$n = 3·4· 6·7·8·9·11·12·13·7·3·16·17·18·19·2·21·22·23·6$

Simplifiquemos eliminando números y productos congruentes con 1 (mód 10) como 11, 21, 9·19, 3·7 , 13·17, 7· 23 y simplificando los representantes de cada clase:

$n \equiv 4·6·8·2·3·6·8·2·2·6 \equiv 4$ (mód 10)

Aún podemos simplificar más. Por ejemplo: $6·6 \equiv 6$ (mód 10) varias veces.

$n \equiv 4·8·8·2·2·6 \equiv 2·2·6 \equiv 4$ (mód 10). La cifra buscada es 4.

36. Encontrar las soluciones reales de la ecuación $\left(x+y\right)^2 = \left(x+1\right)\left(y-1\right)$.

Solución

Con el cambio $\begin{cases} x+1=u \\ y-1=v \end{cases}$ la ecuación queda $(u+v)^2 = uv$ que podemos disponer en la forma $\dfrac{1}{2}\left[u^2+v^2+(u+v)^2\right]=0$ de donde se desprende que u=v=0. Por tanto, la única solución real es $x=-1,\ y=1$.

37. Sea p un número primo mayor que 5. Demostrar que $p-4$ no puede ser la cuarta potencia de un entero.

Solución

Supongamos que existe un entero q tal que $p-4=q^4$ con $q \geq 2$.
En tal caso se tendría

$$p = q^4+4 = \left(q^2+2\right)^2 - 4q^2 = \left(q^2+2\right)^2 - (2q)^2 = \left(q^2+2q+2\right)\left(q^2-2q+2\right)$$

Y tendríamos p descompuesto como producto de dos factores mayores que 1, ya que el menor de ellos es mayor que 1: $q^2-2q+2=(q-1)^2+1 \geq 2$

38. Sean a, b y c números reales no nulos tales que $a+b+c=0$ y $a^3+b^3+c^3=a^5+b^5+c^5$. Probar que $a^2+b^2+c^2=\dfrac{6}{5}$.

Solución

Consideremos el polinomio $P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ que desarrollado es:

$P(x)=x^3+(ab+ac+bc)x-abc$ ya que $a+b+c=0$

$$\left.\begin{array}{l} P(a)=a^3+(ab+ac+bc)a-abc=0 \\ P(b)=b^3+(ab+ac+bc)b-abc=0 \\ P(c)=c^3+(ab+ac+bc)c-abc=0 \end{array}\right\} \text{ Sumando término a término:}$$

$a^3+b^3+c^3+(ab+ac+bc)(a+b+c)-3abc=0$, es decir $a^3+b^3+c^3=3abc$ ya que $a+b+c=0$. Por tanto también $a^5+b^5+c^5=3abc$

Hacemos lo mismo con el polinomio $Q(x)=x^2P(x)$ y obtendremos:

$$\left.\begin{array}{l} Q(a)=a^5+(ab+ac+bc)a^3-a^3bc=0 \\ Q(b)=b^5+(ab+ac+bc)b^3-ab^3c=0 \\ Q(c)=c^5+(ab+ac+bc)c^3-abc^3=0 \end{array}\right\} \text{Sumando término a término}$$

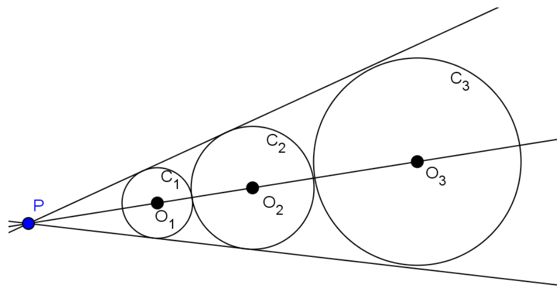
$3abc+3abc(ab+ac+bc)-abc(a^2+b^2+c^2)$. Como $a, b\, y\, c$ son no nulos podemos cancelar su producto. Queda:

$a^2+b^2+c^2=3+3(ab+ac+bc)$. Al ser $a+b+c=0$ se tiene que

$(a+b+c)^2=0=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$, de donde $ab+ac+bc=-\dfrac{3}{5}$ y

por último $a^2+b^2+c^2=\dfrac{6}{5}$ c.q.d.

39. Una familia de circunferencias $C_1, C_2, C_3, \ldots$ con centros en respectivos $O_1, O_2, O_3, \ldots$ son tangentes a dos semirrectas concurrentes en P y, a su vez, (ver figura) cada una de ellas es tangente exterior a sus circunferencias contiguas. Se pide:



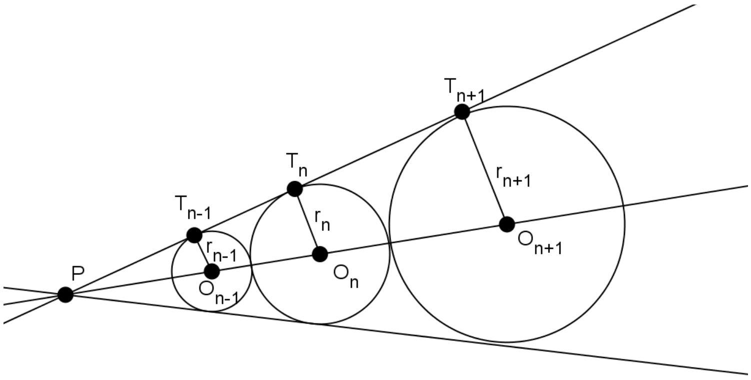
a) Demostrar que las longitudes de los sucesivos radios r_1, r_2, $r_3\ldots$ están en progresión geométrica

b) Siendo $d_n=PO_n$, hallar el valor que ha de tomar el cociente r_n/d_n para que sea igual a k la razón de la progresión geométrica de los sucesivos radios.

c) Si las semirrectas concurrentes forman un ángulo de 60º, ¿cuál será la razón de dicha progresión geométrica?

Solución

a) Tomemos tres circunferencias consecutivas C_{n-1}, C_n, C_{n+1}.
Sean T_{n-1}, T_n, T_{n+1} los sucesivos puntos de tangencia



De la semejanza entre los tres triángulos PT_iO_i rectángulos en T_i

$$\frac{r_{n-1}}{d_{n-1}} = \frac{r_n}{d_{n-1}+r_{n-1}+r_n} = \frac{r_{n+1}}{d_{n-1}+r_{n-1}+2r_n+r_{n+1}} = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n-1}+r_n} = \frac{r_{n+1}-r_n}{r_{n+1}+r_n}$$

La última proporción se ha obtenido aplicando una propiedad elemental de las proporciones. De esta última proporción obtenemos:

$$\left(r_n - r_{n-1}\right)\left(r_n + r_{n+1}\right) = \left(r_{n-1}+r_n\right)\left(r_{n+1}-r_n\right)$$

Desarrollando y simplificando, queda $2r_n^2 = 2r_{n-1}\cdot r_{n+1} \Rightarrow \dfrac{r_n}{r_{n-1}} = \dfrac{r_{n+1}}{r_n}$

Es decir los sucesivos radios están en progresión geométrica.
.

b) Puesto que $\dfrac{r_1}{d_1} = \dfrac{r_2}{d_2} = \ldots = \dfrac{r_n}{d_n} = \ldots$ nos bastará con usar la primera proporción teniendo en cuenta que $r_2 = kr_1$ y $d_2 = d_1 + r_1 + r_2 = d_1 + r_1 + kr_1$

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{kr_1}{d_1+r_1+kr_1} = \frac{(k-1)r_1}{(k+1)r_1} = \frac{k-1}{k+1}$$ (hemos usado de nuevo la misma propiedad)

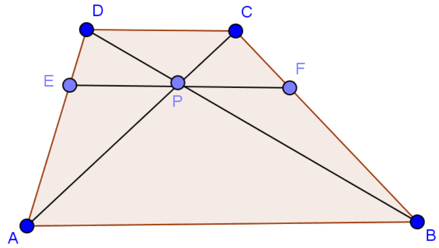
Por lo tanto $\dfrac{r_n}{d_n} = \dfrac{k-1}{k+1}$

c) En este caso $\dfrac{r_1}{d_1} = \dfrac{1}{2}$ ya que $\widehat{OPT_1} = 30^\circ$. Debe ser $k+1 = 2(k-1) \Rightarrow k = 3$

La progresión geométrica será de razón k=3.

40. Las diagonales del trapecio ABCD se cortan en el punto P. Trazamos por P una paralela a las bases AB y CD que corta a los lados oblicuos AD y BC en los puntos E y F respectivamente. Se pide:

a) Demostrar que EP = PF
b) Demostrar que EF es la media armónica de AB y DC.



(Es decir: demostrar que $\frac{1}{EF}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{DC}\right)$)

<u>Solución</u>

Por comodidad sean $AB=a$, $DC=b$, $EP=x$, $PF=y$, $k=\frac{a}{b}$

Los triángulos *ABP* y *CPD* son semejantes por tener sus ángulos respectivamente iguales:

$\widehat{CPD}=\widehat{APB}$ por ser opuestos por el vértice

$\widehat{PCD}=\widehat{PAB}$ por ser alternos internos entre paralelas (también $\widehat{PDC}=\widehat{PBA}$)

De esta semejanza $\frac{a}{b}=\frac{AP}{PC}=\frac{PB}{PD}=k \Rightarrow \begin{cases} AP=k\cdot PC \\ PB=k\cdot PD \end{cases}$

También son semejantes los triángulos ABD y EPD

$$\frac{AB}{EP}=\frac{DB}{DP} \quad \text{es decir} \quad \frac{a}{x}=\frac{DP+PB}{DP}=\frac{DP+k\cdot DP}{DP}=\frac{DP(1+k)}{DP}=1+k$$

Y también son semejantes los triángulos ABC y PFC

$$\frac{AB}{PF}=\frac{AC}{PC} \quad \text{es decir} \quad \frac{a}{y}=\frac{AP+PC}{PC}=\frac{k\cdot PC+PC}{PC}=\frac{PC\cdot(k+1)}{PC}=k+1$$

a) Por consiguiente $x=y=\frac{a}{k+1}$ es decir x=y, o sea *EP=PF* c.q.d.

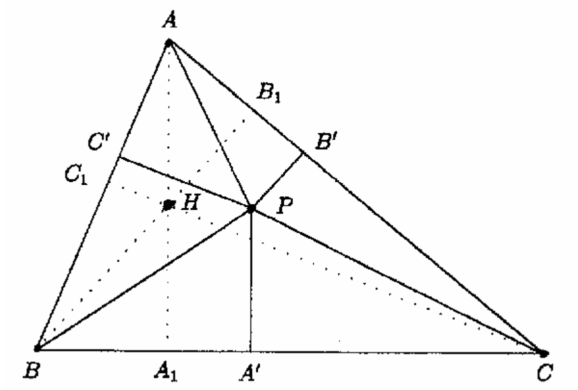
b) Además $\frac{1}{EF}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{\frac{2a}{k+1}}=\frac{\frac{a}{b}+1}{2a}=\frac{1}{2}\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

es decir EF es la media armónica de las bases AB y CD c.q.d.

41. Sean *a*, *b*, *c* y *S* respectivamente las longitudes de los lados y el área de un triángulo acutángulo ABC. Demostrar que si *P* es un punto interior al triángulo ABC tal que $a\cdot PA+b\cdot PB+c\cdot PC=4S$, entonces *P* es el ortocentro del triángulo ABC.

<u>Solución</u>

Sea H el ortocentro del triángulo y sean A_1, B_1, C_1 los pies de las alturas del triángulo y A', B', C' las proyecciones del punto P sobre los lados



Evidentemente $PA + PA' \geq AA_1$ $\quad PB + PB' \geq BB_1$ $\quad PC + PC' \geq CC_1$, es decir

$$PA \geq AA_1 - PA' \qquad PB \geq BB_1 - PB' \qquad PC \geq CC_1 - PC' \qquad (*)$$

- Si $P \equiv H$ se cumple la igualdad en las tres relaciones (*)

$$a \cdot HA + b \cdot HB + c \cdot HC = a(AA_1 - HA_1) + b(BB_1 - HB_1) + c(CC_1 - HC_1) =$$
$$= a \cdot AA_1 + b \cdot BB_1 + c \cdot CC_1 - (a \cdot HA_1 + b \cdot HB_1 + c \cdot HC_1) = 6S - 2S = 4S$$

- Si $P \neq H$ la desigualdad será estricta en, al menos, dos de las relaciones (*)

$$a \cdot PA + b \cdot PB + c \cdot PC > a(AA_1 - PA') + b(BB_1 - PB') + c(CC_1 - PC') =$$
$$= a \cdot AA_1 + b \cdot BB_1 + c \cdot CC_1 - (a \cdot PA' + b \cdot PB' + c \cdot PC') = 6S - 2S = 4S$$

En este caso sería $a \cdot PA + b \cdot PB + c \cdot PC > 4S$

En consecuencia, sólo hay un punto P del interior de ABC que verifica la relación $a \cdot PA + b \cdot PB + c \cdot PC = 4S$, y ese punto es el ortocentro.