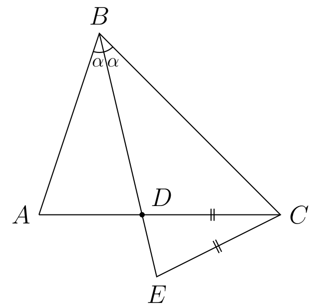
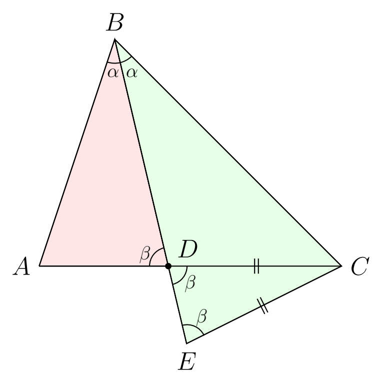


41. En el triángulo ABC trazamos la bisectriz del ángulo $\angle ABC$ que corta al lado BC en el punto D. Sea E un punto en la prolongación de la bisectriz, de manera que $CD = CE$. Prueba que $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$.

Solución.

De los datos del problema, podemos ver que los ángulos $\angle ADB$ y $\angle CDE$ son iguales, al ser opuestos por el vértice. Por otra parte, al ser el triángulo CDE isósceles, el ángulo $\angle CED$ es igual a $\angle CDE$. Por tanto, los triángulos BCE y ABD son semejantes, al tener todos sus ángulos iguales.



De aquí se deduce que

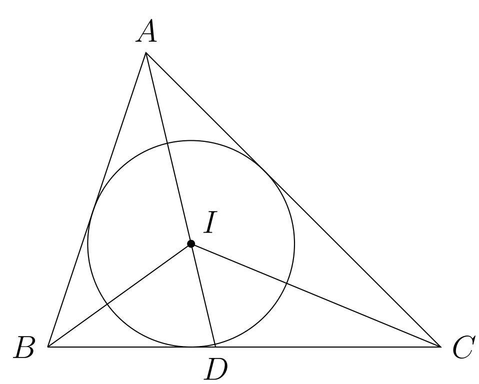
$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CE} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CE} = \frac{AD}{CD},$$

ya que $CE = CD$. A este resultado se le conoce como *Teorema de la bisectriz*.

42. Sean a, b, c los lados BC, CA y AB, respectivamente, de un triángulo ABC. Sea I el incentro y D el punto donde la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ corta al lado BC. Demuestra que $\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$.

Solución.

Hagamos un dibujo para visualizar mejor la situación, teniendo en cuenta que el incentro de un triángulo es el punto donde se cortan las bisectrices.



Aplicando el Teorema de la bisectriz (problema 41) a los triángulos ABD y ACD, respectivamente, resulta

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AI}{ID}, \qquad \frac{AC}{CD} = \frac{AI}{ID}.$$

Ahora bien, $AB = c$, $AC = b$ y $BD + CD = a$. Llamando $x = AI/ID$, las ecuaciones anteriores se escriben como

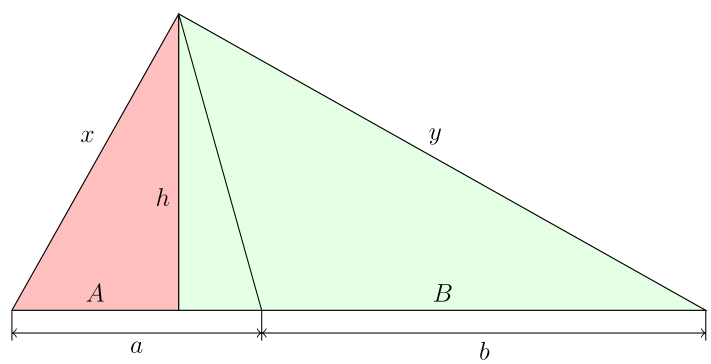
$$x = \frac{c}{a - CD}, \qquad x = \frac{b}{CD},$$

por lo que $CD = b/x$. Sustituyendo en la primera ecuación, se sigue el resultado.

43. La bisectriz del ángulo recto divide a la hipotenusa de un triángulo rectángulo en dos segmentos que están en proporción $9/16$. ¿En qué proporción divide a la hipotenusa la altura interna de dicho triángulo?

Solución.

COmencemos por hacer un dibujo con la situación descrita en el problema. Aquí, a y b son las longitudes de los segmentos en que queda dividida la hipotenusa por la bisectriz de ángulo recto, mientras que A y B son las longitudes de los segmentos que determina la altura sobre la hipotenusa. Por otra parte, x, y son las longitudes de los catetos del triángulo. Lo que debemos calcular es A/B, sabiendo que $a/b = 9/16$.



Por el Teorema de la bisectriz (problema 41), la relación entre los catetos del triángulo rectángulo es la misma que la de los segmentos a y b, por lo que $x/y = 9/16$. Por otra parte, los triángulos sombreados son semejantes, por lo que

$$\frac{x}{y} = \frac{h}{B}, \qquad \frac{x}{y} = \frac{A}{h}.$$

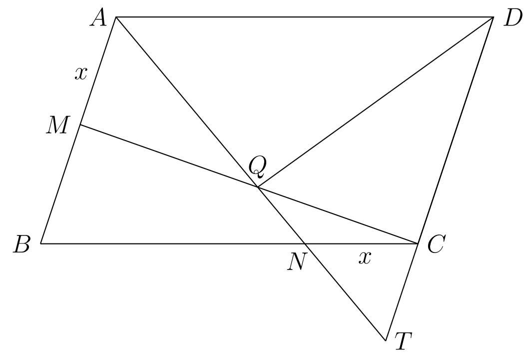
Multiplicando ambas relaciones, resulta

$$\frac{A}{B} = \frac{x^2}{y^2} = \frac{9^2}{16^2} = \frac{81}{256}.$$

44. Sean M y N puntos en los lados AB y BC, respectivamente, del paralelogramo $ABCD$ tales que $AM = NC$. Sea Q el punto de intersección de AN y CM. Demuestra que DQ es la bisectriz del ángulo $\angle CDA$.

Solución.

Prolongamos AN y el lado DC y llamamos T al punto de intersección. Además, tomaremos $x = AM = NC$, quedando la siguiente figura



Si DQ es la bisectriz del ángulo $\angle CDA$, entonces, por el Teorema de la bisectriz (problema 41), en el triángulo ADT deberá cumplirse

$$\frac{AD}{DT} = \frac{AQ}{QT}.$$

Veamos que esto es así. Para ello, nos damos cuenta de que los triángulos TCN y TAD son semenjantes, ya que AD es paralelo a NC. Por tanto,

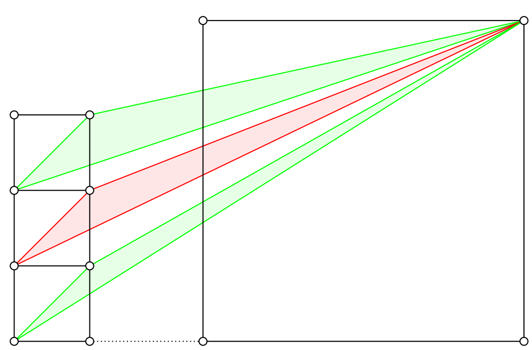
$$\frac{x}{AD} = \frac{TC}{DT} \Rightarrow \frac{x}{TC} = \frac{AD}{DT}.$$

Por otra parte, los triángulos AQM y CQT también son semejantes, ya que AM es paralelo a CT. De la relación de semejanza entre ambos, resulta

$$\frac{x}{TC} = \frac{AQ}{QT} = \frac{AD}{DT},$$

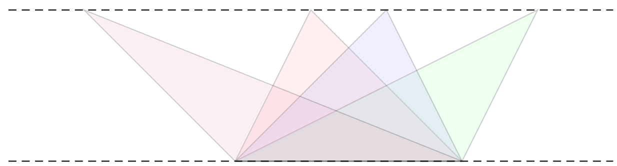
usando la primera relación de semejanza. Por lo tanto, AQ es biseactriz del ángulo $\angle CDA$.

45. En la figura se muestra una columna de tres cuadraditos y otro cuadrado situado sobre la misma recta que la pila de cuadraditos. Prueba que el área del triángulo central (en rojo) es la media aritmética de las áreas de los otros dos triángulos (en verde).

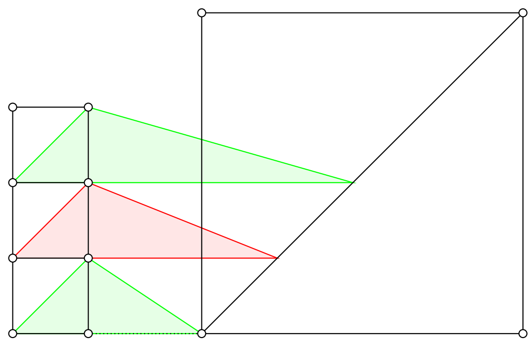


Solución.

Usaremos un resultado básico que dice que si dos triángulos comparten base y altura, su área es la misma. Así, los triángulos en la siguiente figura tienen todos la misma área



En la figura que nos han dado en el problema, trazamos la diagonal del cuadrado grande, que es paralela a las bases de todos los triángulos, si consideramos éstas como las diagonales de los cuadraditos. De este modo, podemos desplazar el vértice superior del triángulo por la diagonal del cuadrado grande sin modificar su área. Así, llegamos a la siguiente figura.

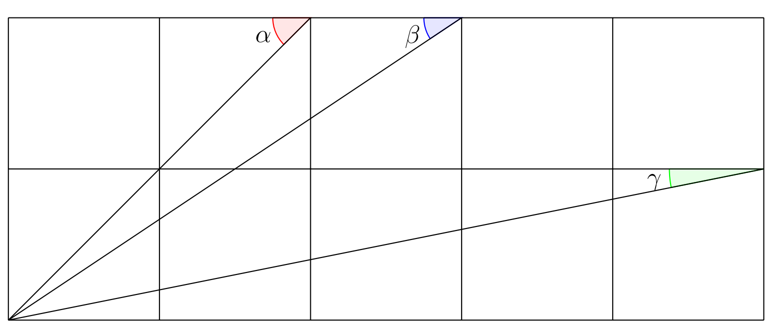


De aquí se sigue fácilmente el resultado, ya que ahora los tres triángulos tienen la misma altura, que es el lado del cuadradito, mientras que la base del triángulo central es claramente la media aritmética de los otros dos, por lo que su área también será la media aritmética. De hecho, si ℓ es el lado del cuadradito, llamando b a la base del triángulo inferior y A_1, A_2, A_3 a las áreas de los triángulos, de abajo a arriba, se sigue que

$$A_1 = \frac{1}{2}b\ell, \quad A_2 = \frac{1}{2}(b+\ell)\ell, \quad A_3 = \frac{1}{2}(b+2\ell)\ell.$$

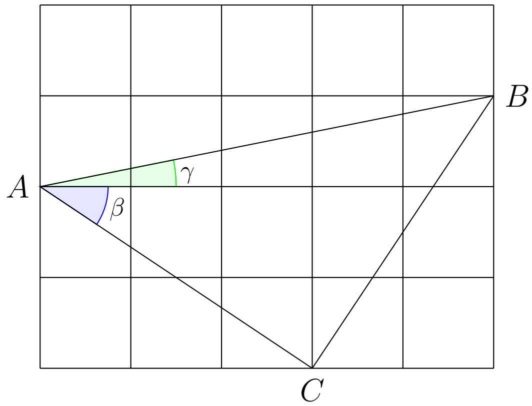
Es decir, $A_2 = (A_1 + A_3)/2$.

46. Prueba que, en la siguiente figura, $\alpha = \beta + \gamma$.



Solución.

Duplicando la altura de la cuadrícula, construimos el siguiente triángulo de vértices A, B, C



Como podemos ver, se trata de un triángulo rectángulo isósceles, de manera que $\angle BAC = \angle ABC = \beta + \gamma$. Por tanto,

$$2(\beta + \gamma) = 90^\circ \Rightarrow \beta + \gamma = 45^\circ = \alpha.$$