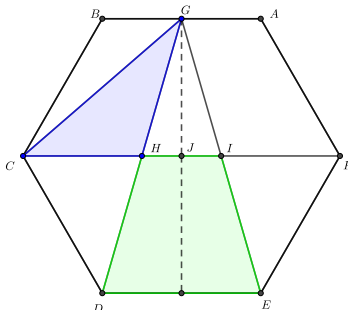


Seminario de problemas. Curso 2022-23. Hoja 5

34. En el hexágono regular $ABCDEF$ de la figura, G es el punto medio del lado AB . ¿Cuál es el cociente entre las áreas del trapecio $DEIH$ y del triángulo CHG ?



Solución. Veamos que el cociente de las áreas $[DEIH]$ y $[CHG]$ es 2.

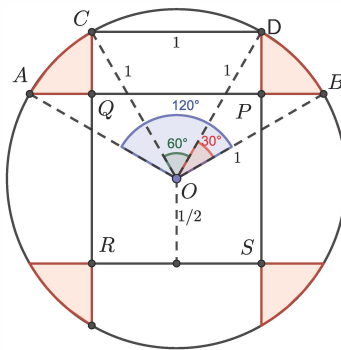
Por la simetría del hexágono regular, la altura h del trapecio $DEIH$ y del triángulo CHG (respecto al lado CH) coinciden. Además, los triángulos HIG y DEG son semejantes, con razón de semejanza 2; de donde, si $\ell = DE$ es la longitud del lado del hexágono, entonces $HI = \ell/2$.

Recordar que la longitud de los lados de un hexágono regular coinciden con la del radio de la circunferencia circunscrita al hexágono. De modo que si J es el punto medio del segmento CF , por la semejanza de los triángulos HIG y DEG , $\ell = CH + HJ = CH + \ell/4$, de donde $CH = \frac{3\ell}{4}$. Por tanto,

$$[CHG] = \frac{CH \cdot h}{2} = \frac{3\ell h}{8}, \quad [DEIH] = \frac{(DE + HI)h}{2} = \frac{(\ell + \ell/2)h}{2} = \frac{3\ell h}{4}.$$

Se obtiene que $\frac{[DEIH]}{[CHG]} = 2$.

35. El cuadrado $PQRS$ de lado 1 m y el círculo de radio 1 m de la figura, tienen el mismo centro. ¿Cuál es, en m^2 , el área de la región sombreada?



Solución. Sea O el centro de la circunferencia y del cuadrado. Por los datos que se dan, el triángulo ODC es equilátero; de donde el ángulo $\angle COD = 60^\circ$. También, $4 \cdot \angle DOB + 4 \cdot 60^\circ = 360^\circ$, o sea, $\angle DOB = 30^\circ$. Por tanto,

$$\angle AOB = 120^\circ.$$

De donde se infiere que el área del sector circular $\widehat{OAB}$ es

$$[\widehat{OAB}] = \pi/3. \quad (1)$$

Usando el teorema de Pitágoras, el segmento $AB = 2\sqrt{1 - (1/2)^2} = \sqrt{3}$ y el área del triángulo OAB es

$$[OAB] = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Por tanto, de (??) tenemos que el área A limitada por la cuerda AB es

$$A = \pi/3 - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Sea $4B$ el área buscada. Entonces el área del cuadrado viene dado por

$$1 = \pi - 4(A - 2B) - 4B \Leftrightarrow 4A - \pi + 1 = 4B \Leftrightarrow 4B = 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3},$$

que es el área buscada.

- 36.** Determinar el menor valor posible de $x + y$, si x, y son números enteros positivos tales que

$$\frac{2020}{2021} < \frac{x}{y} < \frac{2021}{2022}.$$

Solución. Veremos que el menor valor posible es $x + y = 8084$, que se obtiene cuando $x = 4041$, $y = 4043$.

En efecto, observar que $y > x$; de donde, existe d un entero positivo tal que $x = y - d$. Así,

$$1 - \frac{1}{2021} < \frac{y-d}{y} < 1 - \frac{1}{2022} \Leftrightarrow \frac{1}{2020} < \frac{d}{y} < \frac{1}{2021}.$$

Si $d = 1$, no hay solución. Si $d = 2$, se tiene $y = 4043$ y $x = 4041$. Si $d > 2$, entonces $y \geq 6063$. También,

$$\frac{2020}{2021} < \frac{1}{1 + \frac{d}{x}} < \frac{2021}{2022},$$

que equivale a

$$\frac{1}{2021} < \frac{d}{x} < \frac{1}{2020};$$

si $d \geq 3$, entonces $x \geq 6060$. De modo que $x + y \geq 12123$.

- 37.** El entero positivo 1 tiene la propiedad de ser un cuadrado perfecto y al sumarle 99 también resulta ser un cuadrado perfecto. Además del 1, ¿cuántos pares de enteros positivos tienen esa propiedad?

Solución. Sea n, m enteros positivos tales que

$$m^2 + 99 = n^2 \Leftrightarrow 99 = n^2 - m^2 = (n - m)(n + m).$$

Como $99 = 1 \cdot 99 = 3 \cdot 33 = 9 \cdot 11$, entonces tenemos

$$\begin{cases} 1 = n - m, \\ 99 = n + m; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = n - m, \\ 33 = n + m; \end{cases} \quad \begin{cases} 9 = n - m, \\ 11 = n + m; \end{cases}$$

que tienen soluciones $n = 50$, $m = 49$; $n = 18$, $m = 15$; $n = 10$, $m = 1$, respectivamente.

38. En la siguiente lista

$$T, EL, EK, LA, SS$$

cada letra representa un dígito distinto. La diferencia entre cada número y el anterior es un número fijo. Encuentra los números ocultos.

Solución. Como EL y EK son números de dos cifras que comienzan por el mismo dígito, la diferencia d es menor o igual que 9. De donde, como T tiene una sola cifra, se tiene $E = 1, L = 2, S = 3$. Los números tienen la forma

$$T, 12, 1K, 2A, 33.$$

Además,

$$d = 12 - T = 1K - 1L = 33 - 2A, \quad 21 = 33 - 12 = 3d \Leftrightarrow d = 7.$$

Así, los números son:

$$5, 12, 19, 26, 33.$$

39. Hay ocho vasos sobre una mesa con cantidades de agua diferentes. Se permite elegir dos vasos cualquiera e igualar las cantidades de agua en ellos vertiendo parte del agua de un vaso en otro. Demuestra que con la ayuda de tales operaciones es posible asegurarse de que todos los vasos tengan la misma cantidad de agua.

Solución. Consideraremos primero los casos cuando tenemos solo dos vasos y cuando tenemos cuatro vasos de agua. Si tuviéramos solo dos vasos, entonces con la operación propuesta se igualan la cantidad de agua que ellos tienen. Si fueran cuatro vasos, igualamos el agua de dos a dos vasos y separamos uno de cada pareja formando dos grupos de dos vasos cada uno, donde es el mismo el total de agua de cada grupo de dos vasos. Cuando igualamos el agua de los vasos de los dos grupos, los cuatro vasos tienen la misma cantidad de agua.

Finalmente, si tenemos 8 vasos con agua, igualamos el agua de dos a dos vasos y formamos 2 grupos de vasos separando en cada grupo a los que tienen igual cantidad de agua. De esa tendremos los dos grupos de vasos con igual total de agua. Utilizando el procedimiento que hemos descrito para cuatro vasos igualamos el agua de ellos y como el total de agua de cada grupo es el mismo, los 8 vasos tendrán la misma cantidad de agua.

40. Hay 100 monedas en una fila. Sabemos que hay exactamente 26 falsas y además están colocadas de forma seguida. Las monedas verdaderas pesan lo mismo y las monedas falsas no necesariamente pesan lo mismo, pero son más ligeras que las verdaderas. ¿Cómo encontrar al menos una moneda falsa en un solo pesaje en una balanza de dos platos sin pesas?

Solución. Hay varias formas de resolver este problema; por ejemplo, pesamos las monedas que ocupan las posiciones 25^a (vigésimo quinta) y la 76^a (septuagésima sexta), es decir, las posiciones 25^a por delante y por detrás. Si no están equilibradas, la que sube es una moneda falsa. Si están equilibradas, como ambas no pueden ser falsas, porque las falsas están seguidas y son un total de 26, dentro de las primeras y de las últimas 25 no hay ninguna moneda falsa. De modo que las 26 monedas falsas están dentro de las que ocupan las posiciones de la 26^a a la 75^a y la primera moneda falsa tendrá que ocupar de la 26^a a la 50^a (no puede estar después porque entonces la última estaría después de la 75^a); de donde, las monedas que ocupan las posiciones 50 y 51 tendrían que ser falsas.

Otra forma, es pesar las monedas 26 y 52. También podemos localizar una moneda falsa pesando las primeras y las últimas 26 monedas.