Seminario de problemas Curso 2021-22. Hoja 5

36. Sea $N = 9 + 99 + 999 + \cdots + 99\ldots99$ donde cada sumando tiene un dígito 9 más que el anterior y el último sumando está formado por 2021 cifras iguales a 9. ¿Cuántas veces aparecerá el dígito 1 en el número N?.

Solución.

Conviene realizar las primeras sumas antes de tratar de obtener la suma completa. De esta forma:

$$\begin{aligned}
108 &= 9 + 99\\
1107 &= 9 + 99 + 999\\
11106 &= 9 + 99 + 999 + 9999\\
111105 &= 9 + 99 + 999 + 9999 + 99999\\
&\ldots\\
111111111099 &= 9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + 99999999999\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Analizando los resultados de los primeros sumandos que generan el número N, podemos comprobar que el dígito 1 aparece tantas veces como sumandos tiene el número N menos 1. Además, podemos destacar la última suma del listado anterior, que es aquella que recoge los once primeros sumandos cumpliendo que, aunque se mantiene el número de 1's, aumentan los dígitos a la derecha del 1. Pero podemos visualizar este resultado de una forma diferente. Observamos que realizar esta suma, es equivalente a realizar las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
108 &= (10-1) + (100-1) = 10 + 100 - 2\\
1107 &= (10-1) + (100-1) + (1000-1) = 10 + 100 + 1000 - 3\\
&\ldots\\
111111111099 &= (10-1) + (100-1) + \ldots + (10^{11}-1) = 10 + \ldots + 10^{11} - 11\\
&\ldots
\end{aligned}$$

De esta forma, si sumamos todos los múltiplos de 10, obtendremos un número formado 2021 unos y un cero que, al restar 2021, nos quedará:

$$1\cdots111110 - 2021 = 1\cdots109089.$$

Observamos que, de los 2021 unos que había de partida, hemos quitado cuatro. Por tanto, quedarán 2017 unos después de la operación.

37. Obtén el resultado de la siguiente operación $2021^2 - 2020^2 + 2019^2 - 2018^2 + \ldots + 3^2 - 2^2 + 1^2$.

Solución.

Si realizamos las diferencias parciales tenemos:

$$\begin{aligned}
(2021^2 - 2020^2) &= (2021 + 2020)(2021–2010) = 4041\\
(2019^2–2018^2) &= (2019 + 2018)(2019 - 2018) = 4037\\
&\ldots\ldots\\
3^2–2^2 &= (3 + 2)(3 - 2) = 5\\
1 &= 1
\end{aligned}$$

La suma consiste en la suma de los números: $4041 + 4037 + \ldots + 5 + 1$ En total hay 1011 sumandos que forman una progresión aritmética cuyo primer término es 4041 y de diferencia -4. El término general de la progresión es: $a_n = 4041 + (n-1)\cdot(-4)$. Resolviendo la ecuación $4041 + (n-1)\cdot(-4) = 1$, resulta que $n = 1011$. Aplicando la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética tendremos que la suma vale $S_1011 = ((4041+1) * 1011)/2 = 2043231$.

38. ¿Cuáles son los números de tres cifras que cumplen la condición de que el producto de estas cifras sea igual a su suma?

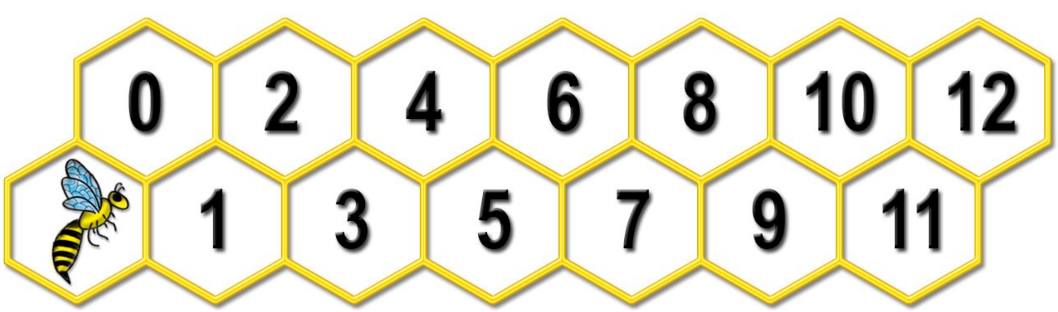
Solución.

Sea un número abc de forma que $0 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ y $0 \leq c \leq 9$. Para que se cumpla la relación, se debe ser igual a la suma; por tanto, $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$. Aplicando el enunciado del problema, se cumple $abc = a + b + c$ y, por tanto, $abc - a = b + c$ y, de aquí $a(bc-1) = b + c$. Esto es, $a = \frac{b+c}{bc-1}$. Para que sean números naturales, damos valores diferentes :

- Suponemos que $b = 1$. Por tanto, $a = \frac{1+c}{c-1} \in \mathbb{N}$, para $c \neq 1$. De esta forma, si $c = 2$ se tendría $a = 3$, o bien, si $c = 3$ se tendría $a = 2$. Observamos que, si $c > 3$, se tiene que $1 < \frac{1+c}{c-1} < 2$ y, por ello, $a \neq \mathbb{N}$. Concluimos que las soluciones con $b = 1$, son 312 y 213.
- Suponemos que $b = 2$. Por tanto, $a = \frac{2+c}{2c-1} \in \mathbb{N}$. De esta forma, si $c = 1$ se tendría $a = 3$, o bien, si $c = 3$ se tendría $a = 1$. Por otro lado, si $c = 2$, se obtiene $a = \frac{4}{3} \in \mathbb{N}$. Observamos que, si $c > 3$, se tiene que $1 < \frac{2+c}{2c-1} < 1$ y, por ello, $a \neq \mathbb{N}$. Concluimos que las soluciones con $b = 2$, son 321 y 123
- Suponemos que $b = 3$. Por tanto, $a = \frac{3+c}{3c-1} \in \mathbb{N}$. De esta forma, si $c = 1$ se tendría $a = 2$, o bien, si $c = 2$ se tendría $a = 1$. Observamos que, si $c > 3$, se tiene que $\frac{3+c}{3c-1} < 1$ y, por ello, $a \neq \mathbb{N}$. Concluimos que las soluciones con $b = 3$, son 231 y 132
- Suponemos que $b > 3$. Entonces $a = \frac{b+c}{bc-1} \in \mathbb{N}$. Notemos que, si $c = 1$, se tiene que $1 < \frac{b+1}{b-1} < 2$, entonces $a \in \mathbb{N}$. Por otro lado, si $c = 2$, se tiene $0 < \frac{b+2}{2b-1} < 1$, luego entonces $a \in \mathbb{N}$. Por último, si $c \geq 3$, tenemos $\frac{b+c}{bc-1} < 1$entonces $a \in \mathbb{N}$.

Concluimos que ya no hay más soluciones.

39. La abeja de la figura no puede volar y va saltando de una celda a otra contigua siempre que su número sea mayor que el anterior. ¿Cuántas rutas diferentes puede seguir hasta llegar a la casilla 12?



Solución.

Para obtener la solución necesitamos estudiar primero la cantidad de rutas posibles que hacen falta para llegar a los números más pequeños y observar que, la cantidad de rutas posibles para llegar a un número n es la suma de las cantidades para llegar a n–1 y n–2. De esta forma, encontramos una solución directa mediante la sucesión de Fibonacci.

En concreto, para llegar al número 0, solo hay una posibilidad. Para llegar al número 1, se puede llegar de dos formas diferentes, desde el inicio y desde el 0. Seguidamente, el último salto hasta el 2 se puede realizar desde el 0 y desde el 1; así, sumando todos los caminos que llegan a cada uno de estas dos posiciones, obtenemos que la suma de las posibilidades es 3. Concluimos, que el resultado total para cada una de las celdas es:

Celda destino	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de caminos	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

40. En una votación para la elección de una delegación entre dos candidaturas A y B se emiten 9 votos y gana A por uno. Hallar y describir el número de maneras que pueden contarse las papeletas de votación, de tal forma que siempre vaya por delante la candidatura ganadora.

Solución.

Como el candidato A va siempre por delante, nos hemos de mover por debajo de la diagonal. El número de maneras será igual al número de camino que podamos construir desde el extremo inferior izquierdo hasta el superior derecho. En cada uno de los vértices tenemos el número de caminos diferentes que hay desde el origen. Por tanto, concluimos que el resultado es de 14.