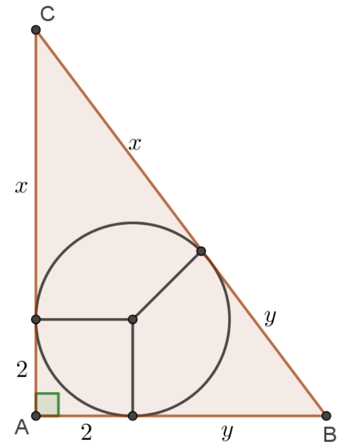
# Seminario de problemas. Curso 2017-18. Soluciones hoja 5

**33.** Hallar todos los triángulos rectángulos cuyos lados vienen dados por números enteros y tales que el número que indica su área es igual al que indica su perímetro.

Solución




Sabemos que, siendo $r$ el radio de la circunferencia inscrita, el área S del triángulo es $S = pr$ Siendo $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ el semiperímetro.

En nuestro caso debe ser

$$2p = S \Rightarrow 2p = pr \Rightarrow r = 2$$

Consideremos un triángulo rectángulo $ABC$ con $\widehat{A} = 90^{\circ}$.

Los segmentos tangentes a la circunferencia inscrita al triángulo son $x, y, r=2$ (ver figura).

$$\left.\begin{array}{l} 2p = 2x + 2y + 4 \\ S = \dfrac{(x+2)(y+2)}{2} \end{array}\right\} \; 4x + 4y + 8 = (x+2)(y+2)$$

Lo que nos lleva a la ecuación $xy - 2x - 2y = 4$, que se puede poner de esta forma:

$$(x-2)(y-2) = 8$$

Es claro que $x$ e $y$ también son enteros, pues lo son los catetos $b = x+2$ y $c = y+2$.

Hay dos posibilidades (y sus simétricas, que son equivalentes):

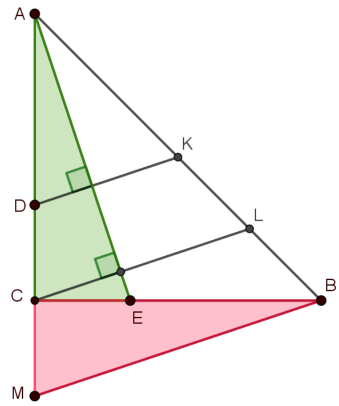
$$\left.\begin{array}{l} x-2 = 1 \\ y-2 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3\,,\; y = 10 \Rightarrow c = 5,\; b = 12,\; a = 13$$

$$\left.\begin{array}{l} x-2 = 2 \\ y-2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4\,,\; y = 6 \Rightarrow c = 6,\; b = 8,\; a = 10$$

Luego hay sólo dos triángulos rectángulos que cumplan tales condiciones:
los de lados (13, 12, 5) y (10, 8, 6).

**34.** En un triángulo rectángulo isósceles $ABC$ (con $\widehat{C} = 90^{\circ}$) tomamos dos puntos $D$ y $E$ en los catetos $AC$ y $CB$ respectivamente de modo que $CD=CE$. Las prolongaciones de las perpendiculares a $AE$ desde $D$ y $C$ cortan a la hipotenusa $AB$ en los puntos $K$ y $L$ respectivamente. Demostrar que $KL=LB$.

Solución




En la prolongación de $AC$ tomamos un punto $M$ de modo que $CM=CE=CD$.

Los triángulos $ACE$ y $BCM$ son congruentes, pues el segundo se obtiene girando el primero 90º en torno a $C$. Por tanto $BM$ es perpendicular a $AE$ y, por tanto, paralela a $CL$ y $DK$.

Aplicando el teorema de Thales a las paralelas $DK$, $CL$ y $MB$ tendremos:

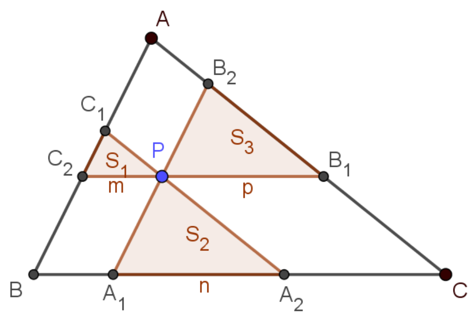
$$CD=CM \Rightarrow KL=LB \text{ c.q.d.}$$

**35.** Desde un punto $P$ del interior de un triángulo $ABC$ se trazan tres rectas paralelas a cada uno de los lados. Estas rectas dividen el triángulo en seis partes, tres de las cuales son triángulos de áreas $S_1, S_2$ y $S_3$. Hallar el área $S$ del triángulo $ABC$.

Solución

Llamamos $A_1, A_2$ los puntos de corte de las paralelas con el lado $BC$ y análogamente los otros cortes $B_1, B_2$ con $AC$ y $C_1, C_2$ con $AB$ (ver figura).

Sean $C_2P=m$, $A_1A_2=n$, $PB_1=p$




Evidentemente los tres triángulos son semejantes al triángulo original, pues los ángulos de cada uno de ellos son iguales a los ángulos de $ABC$ (correspondientes entre paralelas).

Las razones de semejanza son distintas

$$\triangle C_1C_2P \sim \triangle ABC \quad \text{con} \quad k_1 = \frac{C_2P}{BC} = \frac{m}{a}$$

$$\triangle A_1A_2P \sim \triangle ABC \quad \text{con} \quad k_2 = \frac{A_1A_2}{BC} = \frac{n}{a}$$

$$\triangle B_1B_2P \sim \triangle ABC \quad \text{con} \quad k_3 = \frac{PB_1}{BC} = \frac{p}{a}$$

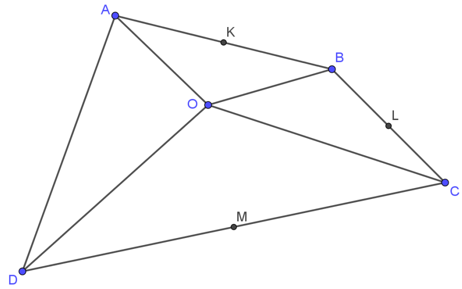
Recordemos que en una semejanza de razón $k$, dos áreas homólogas están en la razón $k^2$.

En nuestro caso: $\frac{S_1}{S} = \frac{m^2}{a^2}$ ; $\frac{S_2}{S} = \frac{n^2}{a^2}$; $\frac{S_3}{S} = \frac{p^2}{a^2}$

En consecuencia: $$\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{m}{a} + \frac{n}{a} + \frac{p}{a} = \frac{m+n+p}{a} = 1$$

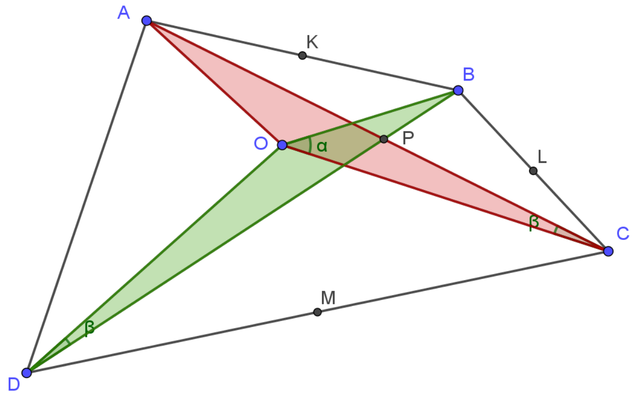
Por tanto $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \Rightarrow S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$

**36.** En un cierto cuadrilátero convexo $ABCD$ (ver figura) $O$ es un punto interior tal que $\angle AOB = \angle COD = 120^{\circ}$, $OA=OB$ y $OC=OD$. Si $K$, $L$ y $M$ son los puntos medios de los lados $AB$, $BC$ y $CD$ respectivamente, prueba que el triángulo $KLM$ es equilátero.




Solución

Basta probar que $KL=LM$ y que $\widehat{KLM} = 60^{\circ}$.




Construimos los triángulos $AOC$ y $BOD$.
Estos triángulos son congruentes ya que

$OA=OB$, $OC=OD$ y
$\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 120^{\circ} + \alpha$ siendo $\alpha = \widehat{BOC}$.

Por tanto, $AC=BD$ (las diagonales son iguales).

Veamos que se cortan con ángulo de 60º

Sabemos que $\widehat{ODB} = \widehat{OCA} = \beta$

En el triángulo $PDC$ tenemos: $\widehat{PDC} = 30^{\circ} - \beta \;\; y \;\; \widehat{PCD} = 30^{\circ} + \beta \;\; \Rightarrow \widehat{BPC} = 60^{\circ}$

En los triángulos $ABC$ y $BCD$, los segmentos $KL$ y $LM$ son las respectivas paralelas medias de los lados $AC$ y $BD$, por lo que son iguales entre sí (ambos son la mitad de las diagonales, que son iguales).

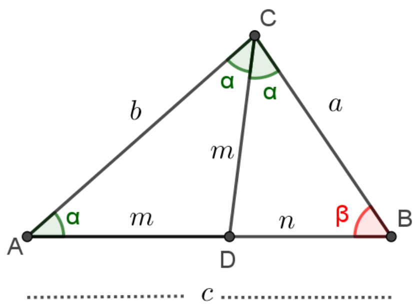
El ángulo que $KL$ forma con $LM$ es de 60º, al ser estos segmentos paralelos a sus respectivas bases (las diagonales) que forman entre sí un ángulo de 60º.

En consecuencia, el triángulo $KLM$ es equilátero c.q.d.

Notemos que si $A$, $O$ y $C$ estuviesen alineados, también se cumpliría trivialmente.

**37.** Hallar todos los triángulos cuyos lados vienen dados por tres enteros positivos consecutivos y tienen dos ángulos tales que uno de ellos es el doble de otro.

Solución




Supongamos un triángulo $ABC$ en el que
$\widehat{A} = \alpha$ , $\widehat{C} = 2\alpha$ $y$ $\widehat{B} = 180^{\circ} - 3\alpha = \beta$.

La bisectriz de $\widehat{C}$ corta al lado $AB$ en el punto $D$.
Sean $AD = m$ $y$ $DB = n$.

$CD$ descompone el triángulo $ABC$ en dos triángulos:

$\triangle ACD$ que es isósceles con $AD = CD = m$
$\triangle CDB$ que es semejante al triángulo ABC, pues dos ángulos de uno son iguales a dos ángulos del otro.

De esta semejanza: $\dfrac{a}{n} = \dfrac{b}{m} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{a+b}{n+m} = \dfrac{a+b}{c} \Rightarrow c^2 = a(a+b) \qquad (I)$

Sabemos que los tres lados son distintos, por lo que también serán distintos los tres ángulos. Puesto que a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa, hay tres posibilidades:

1) Que $\widehat{B} < \widehat{A} < \widehat{C}$ , en cuyo caso $b = a-1 \;\; y \;\; c = a+1$. La condición ($I$) queda
$(a+1)^2 = a(2a-1) \;\Rightarrow a^2 - 3a - 1 = 0$ que no da soluciones enteras.

2) Que $\widehat{A} < \widehat{B} < \widehat{C}$, en cuyo caso $b = a+1 \;\; y \;\; c = a+2$. La condición ($I$) queda
$(a+2)^2 = a(2a+1) \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ \cancel{a = -1} \end{cases}$
Ya tenemos uno: el triángulo de lados $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$

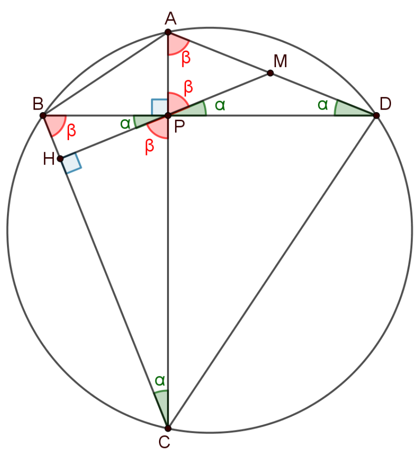
3) Que $\widehat{A} < \widehat{C} < \widehat{B}$, en cuyo caso $c = a+1 \;\; y \;\; b = a+2$. La condición ($I$) queda
$(a+1)^2 = a(2a+2) \Rightarrow a^2 = 1 \;\Rightarrow\; a = 1,\, b = 3,\, c = 2$
Pero estas tres longitudes no satisfacen la desigualdad triangular: no forman triángulo.

En consecuencia, hay un único triángulo con esas condiciones: el de lados 4, 5 y 6.

**38.** En un cuadrilátero cíclico $ABCD$ las diagonales $AC$ y $BD$ son perpendiculares y se cortan en el punto $P$. Demostrar que la recta perpendicular por $P$ a uno de sus lados corta al lado opuesto en su punto medio.

Solución

Sean $H$ y $M$ los puntos de corte de la perpendicular a $BC$ por $P$ con los lados $BC$ y $AD$ respectivamente.

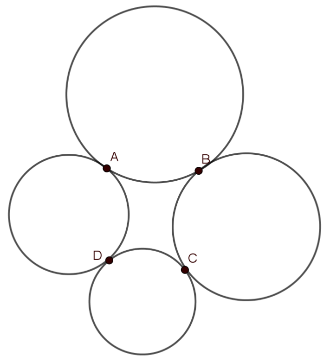



$\widehat{BPH} = \widehat{BCA}$ ya que $PH \perp BC \;\; y \;\; PB \perp PC$
Sea $\alpha = \widehat{BCA} = \widehat{BDA}$ (inscritos con igual arco)
También $\alpha = \widehat{BPH} = \widehat{MPD}$ (opuestos por el vértice)
Por tanto el triángulo $MPD$ es isósceles con $MP=MD$

Por otro lado $\beta = \widehat{PAM} = 90^\circ - \alpha = \widehat{MPA}$, por lo que el triángulo $APM$ también es isósceles con $MA=MP$.

En consecuencia $AM = MD$ por ser ambos iguales a $MP$.
Análogamente con las demás perpendiculares y lados.

**39.** Sean cuatro circunferencias con tangencias consecutivas entre cada dos de ellas en los puntos *A*, *B*, *C* y *D* según indica la figura. Demostrar que el cuadrilátero *ABCD* es cíclico.



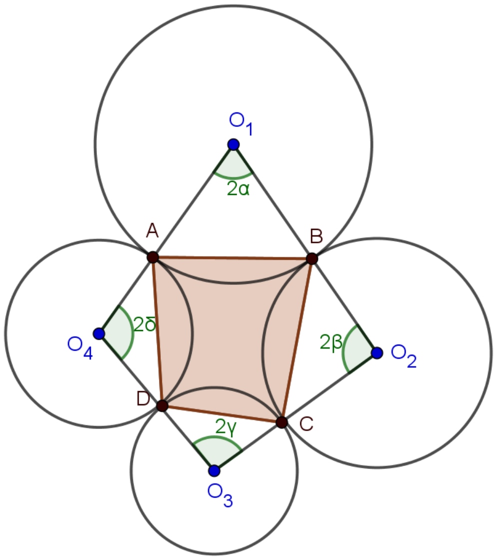

Solución

Sean $O_1, O_2, O_3, O_4$ los centros de las sucesivas circunferencias y sean $r_1, r_2, r_3, r_4$ sus respectivos radios.

$O_1, B, O_2$ están alineados, pues tienen una tangente común en B. Por tanto: $O_1O_2 = r_1 + r_2$.

Análogamente $O_2O_3 = r_2 + r_3$ ; $O_3O_4 = r_3 + r_4$ ; $O_4O_1 = r_4 + r_1$

El cuadrilátero $O_1O_2O_3O_4$ está circunscrito a una circunferencia, ya que cumple el teorema de Pitot al ser $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ la suma de cada dos lados opuestos.




Esto significa que las bisectrices interiores de $O_1O_2O_3O_4$ concurren en un mismo punto *P*. Pero estas bisectrices son las mediatrices de los lados *AB*, *BC*, *CD*, *DA* del cuadrilátero *ABCD*, ya que los triángulos $AO_1B$, $BO_2C$, $CO_3D$, $DO_4A$ son isósceles. Por tanto, el punto *P* equidista de *A*, *B*, *C* y *D*, por lo que *A*, *B*, *C* y *D* están en una misma circunferencia de centro *P*.

También puede comprobarse que *ABCD* es un cuadrilátero cíclico asegurando que dos ángulos opuestos del mismo son suplementarios.

Sean $2\alpha = \widehat{AO_1B}$, $2\beta = \widehat{BO_2C}$ , $2\gamma = CO_3D$, $2\delta = DO_4A$

Es claro que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$

Los triángulos $AO_1B$, $BO_2C$, $CO_3D$, $DO_4A$ son isósceles, pues en todos hay dos lados que, por ser radios de la misma circunferencia, son iguales. Por lo tanto:

$\widehat{O_1BA} = \widehat{O_1AB} = 90^\circ - \alpha$ ; $\widehat{O_2BC} = \widehat{O_2CB} = 90^\circ - \beta$ ; $\widehat{O_3CD} = \widehat{O_3DC} = 90^\circ - \gamma$ ;
$\widehat{O_4DA} = \widehat{O_4AD} = 90^\circ - \delta$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta \quad * \\ \widehat{CDA} = 180^\circ - (90^\circ - \gamma) - (90^\circ - \delta) = \gamma + \delta \quad * \end{array}\right\} \widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

Por consiguiente, el cuadrilátero *ABCD* es cíclico c.q.d.

(Las relaciones * también pueden obtenerse trazando las tangentes comunes y sumando ángulos semiinscritos)