Seminario de problemas Curso 2016-17. Hoja 5

28. Encontrar todos los números naturales tales que $10^n + 11^n + 12^n = 13^n + 14^n$.
Solución.
Se comprueba que $n = 0$ y $n = 1$ no son soluciones mientras que $n = 2$ si que lo es. Demostramos por inducción que $P(n) : 10^n + 11^n + 12^n < 13^n + 14^n$ se cumple para $n > 2$. Para $n = 3$, $10^3 + 11^3 + 12^3 = 4059 < 4941 = 13^3 + 14^3$.. Suponemos como hipótesis inductiva $10^k + 11^k + 12^k < 13^k + 14^k$ luego se cumple

$$10^{k+1} + 11^{k+1} + 12^{k+1} = (10^k + 11^k + 12^k) \cdot 10 + 11^k + 2 \cdot 12^k <$$

$$< (13^k + 14^k) \cdot 10 + 11^k + 2 \cdot 12^k < (13^k + 14^k) \cdot 10 + 3 \cdot 13^k + 4 \cdot 14^k = 13^{k+1} + 14^{k+1}.$$

Luego $10^n + 11^n + 12^n < 13^n + 14^n$ para $n > 2$. Concluimos que la única solución será $n = 2$.

29. Sean a, b y c las tres raíces de $x^3 - x + 1 = 0$, encontrar $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}$.
Solución.
Obtenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} &= \frac{a+b+2}{ab+a+b+1} + \frac{1}{c+1} \\ &= \frac{ac+bc+2c+a+b+2+ab+a+b+1}{abc+ac+bc+c+ab+a+b+1} \\ &= \frac{ac+bc+ab+2a+2b+2c+3}{abc+ac+bc+ab+a+b+c+1}. \end{aligned}$$

Utilizando las fórmulas de Cardano, $abc = -1, a + b + c = 0, ab + bc + ac = -1$, luego la respuesta es $\frac{ac+bc+ab+2a+2b+2c+3}{abc+ac+bc+ab+a+b+c+1} = \frac{-1+2\cdot 0+3}{-1+-1+1} = \frac{2}{-1} = \boxed{-2}$.

30. Sean a, b, c y d números reales tales que $a + b + c + d = 0$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$, $abc + abd + acd + bcd = 0$. Demostrar que $a = b = c = d = 0$.
Solución.
Observar que si consideraramos las soluciones complejas, entonces $x, -x, xi$ y $-xi$ para todo x perteneciente a los reales sería solución. La idea es crear un polinomio que tenga como coeficientes a las expresiones del enunciado, esto es, $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ y así nos quedará $P(x) = x^4 - x^3(a+b+c+d) + x^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) - x(abc+abd+acd+bcd) + abcd$. Usando las hipótesis del enunciado, $P(x) = x^4 + abcd$. Notar que $abcd$ no puede ser positivo, en ese caso , $P(x) > 0$ para todo valor de x; y tampoco puede ser negativo, porque si suponemos que $abcd = -u^4$ (donde u es un valor real cumpliendo la igualdad anterior), entonces $P(x) = x^4 - u^4 = (x^2 + u^2)(x^2 - u^2)$ al hacer la diferencia de cuadrados, aunque, se puede ver que $x^2 + u^2$ tiene dos raíces complejas, por lo que $P(x)$ no puede tener las cuatro raíces reales; por tanto, $abcd = 0$. Entonces, al menos uno de los valores de a, b, c y d tiene que ser cero y, sin perder generalidad, podemos ir suponiendo que se anula cada uno de ellos y obtenemos el resultado.

31. A cada uno de los vértices de un cubo le asignamos 1 o -1, y asignamos a cada una de las caras el producto de los 4 números de sus vértices. ¿Podemos obtener una asignación inicial de los números en los vértices de forma que la suma de los 14 números (8 de los vértices más 6 de las caras) sea 0 ?
Solución.

Comenzamos asignando un 1 a cada vértice; cambiando algunos 1 por -1 podemos llegar a cualquier configuración del cubo. Observamos que, cuando cambiamos de signo: el vértice (pasa de 1 a -1) y los tres productos de caras que contienen a ese vértice. De esta forma, la paridad del número total de -1s se mantiene: los cambios posibles en la zona de las caras son:

$$\begin{aligned}\{1,1,1\} &\rightarrow \{-1,-1,-1\} \\ \{1,1,-1\} &\rightarrow \{-1,-1,1\} \\ \{1,-1,-1\} &\rightarrow \{-1,1,1\} \\ \{-1,-1,-1\} &\rightarrow \{1,1,1\}.\end{aligned}$$

y, por lo tanto, en las caras, el número de -1s aumenta en tres, aumenta en uno, disminuye en uno o disminuye en tres; por lo tanto, si añadimos un -1 nuevo en el vértice que cambiamos, al final el número de -1s ha variado en un número par. Observamos, por otro lado, que hemos comenzado con cero -1s, si al final la suma debe de dar 0, deberíamos tener siete 1s y siete -1s, lo que debería hacer cambiar la paridad durante el camino, lo cual no puede ocurrir.
Solución 2.
Dado que necesariamente debemos tener siete 1s y siete -1s, el producto de los 14 términos es -1. Pero po otro lado, el término correspondiente a cada cara es el producto de los cuatro vértices que la rodean y cada vértice aparece en tres caras, luego el producto de los 14 términos es el producto de los 8 términos elevado a 4 (dado que cada vértice aparece cuatro veces en el recuento, una como vértices y otras tres por las caras que lo rodean), que es 1.

32. Dada $\{p_n\}_n$ la sucesión de los números primos, probar que $p_n > 2n-1$ para $n \geq 5$.
Solución.
El caso $p_5 = 11 > 2 \cdot 5 - 1 = 9$ se cumple. Si consideramos como hipótesis $p_n > 2n-1$ para algún n, entonces $p_{n+1} \geq p_n + 2 > (2n-1)+2 = 2(n+1)-1$.

33. ¿Se puede elegir 2016 enteros positivos distintos menores que 100000, tales que no haya tres en progresión aritmética ?
Solución.
La solución del problema pasa por encontrar un algoritmo *voraz* que nos permita obtener una sucesión de elementos de forma que no haya tres de ellos (en la sucesión) que estén en progresión aritmética. Para ello, empezamos paso por paso de forma que obtener el menor entero que no está en progresi'on aritmética con dos términos precedentes. De esta forma obtenemos la siguiente sucesión:

$$0,1,3,4,9,10,12,13,27,28,3031,36,37,39,40,...$$

Obtenemos una sucesión con varias regularidades. Se puede observar que aparecen las potencias de 3, pero también aparece la siguiente sucesión escrita en sistema ternario:

$$0,1,10,11,100,101,110,111,1000,\ldots$$

Esto nos hace ver que, aunque estén escritos en ternario, no hemos escrito el dígito 2. Luego nuestra conjetura es que los términos de la sucesión que cumplen esta propiedad a_n son los número escritos en binario n y leídos en ternario. Por ejemplo:

$$a_{2016} = a_{11111100000_2} = 11111100000_3 = 88452.$$

34. Y para terminar la función:

- Dada una función f con la propiedad que, para cada número real x se cumple $f(x)+f(x-1)=x^2$. Si se cumple que $f(87)=99$, ¿cuál es el valor de $f(99)$?
- Existen dos funciones lineales $f(x)$ tales que $f(x+f(x))=x$, ¿ cuál es la suma de estas dos funciones?
- Demostrar que si la ecuación $f(x)=x$ no tiene soluciones reales, entonces $f(f(x))=x$ tampoco las tiene (para f, una función continua).

Solución.

- Consideramos el siguiente proceso que nos da que el resultado es 1221:

$$\begin{aligned} f(99) &= 99^2 - f(98) = 99^2 - 98^2 + f(97) = 99^2 - 98^2 + 97^2 - f(96) = \dots \\ &= (99^2 - 98^2) + (97^2 - 96^2) + \dots + (89^2 - 88^2) + f(87) = \\ &= 197 + 193 + \dots + 177 + 99 = 1221. \end{aligned}$$

- Como son lineales, podemos substituir $f(x)$ por $ax+b$, entonces

$$a(x+(ax+b))+b = x \implies a(a+1)x+b(a+1) = x \implies b(a+1)=0, a(a+1)=1.$$

No podemos tener $a+1=0$, sino no se cumpliria la segunda ecuación, por tanto, $b=0$. De aquí nos queda que $a(a+1)=1$, luego tenemos dos valores posibles de $a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ y la suma de las dos funciones vale $-x$.
- Consideramos f una función continua, luego tendremos $f(x)>x$ para cualquier $x\in\mathbb{R}$ o $f(x)<x$ para cualquier $x\in\mathbb{R}$; por tanto, se cumple que $f(f(x))>f(x)>x$ para cualquier $x\in\mathbb{R}$.