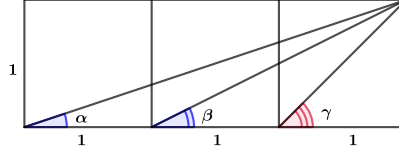
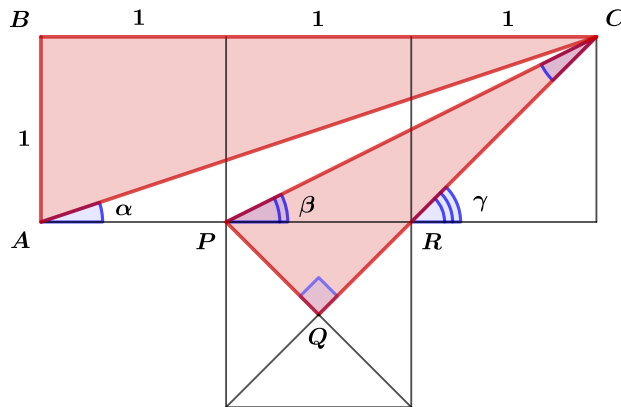


Seminario de problemas Curso 2020-21. Hoja 5: Soluciones

26. Demuestra que entre los ángulos de la figura se cumple la relación $\gamma = \alpha + \beta$.



Solución 1. Entre los catetos de los triángulos rectángulos ABC y PQR (pintados de rojo en la figura) se tiene la relación



$$\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR} = \frac{1}{3},$$

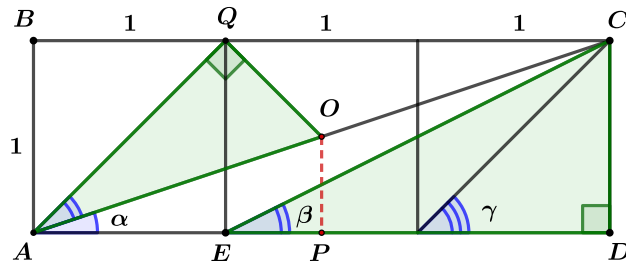
luego los triángulos son semejantes, y eso implica que

$$\angle PCR = \angle ACB = \angle CAP = \alpha.$$

Ahora, considerando el triángulo PRC , es inmediato ver que

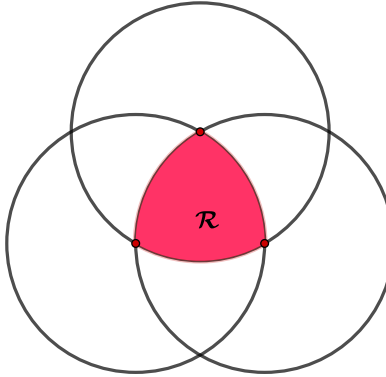
$$\gamma = \beta + \angle PCR = \beta + \alpha.$$

Solución 2. En la segunda figura, P es el punto medio de la base del cuadrado central, o bien del segmento AD . La recta paralela a DC por el punto P corta a la diagonal AC en el punto O . Los triángulos rectángulos APO y ADC son semejantes, ya que los catetos de cada uno de ellos están en proporción 3: 1, y se deduce que $OP = \frac{1}{2}CD = 1/2$. Entonces el punto O es el centro del cuadrado central.



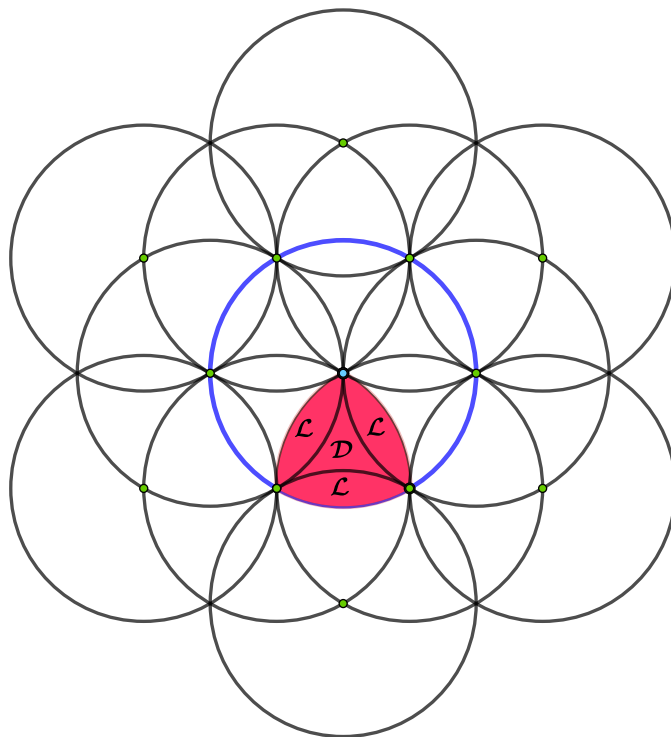
Por tanto el triángulo AOQ es rectángulo, y tiene sus catetos en la proporción 2: 1, igual que el triángulo ECD . Luego los triángulos AOQ y ECD son semejantes y se deduce que $\angle OAQ = \beta$. Y entonces $\alpha + \beta = \angle EAQ = 45^\circ = \gamma$.

- 27.** En la figura, los tres círculos tienen el mismo radio y cada uno pasa por los centros de los otros dos. El área $\mathcal{R}$ de la región coloreada central, ¿es mayor, o es menor que la cuarta parte del área de cada círculo?



Solución. Si no queremos hacer muchos cálculos, podemos construir la figura siguiente. Tenemos que $\mathcal{R} = 3\mathcal{L} + \mathcal{D}$ y, llamando $\mathcal{C}$ al área del círculo, que $\mathcal{C} = 12\mathcal{L} + 6\mathcal{D}$. Entonces

$$\frac{1}{4}\mathcal{C} = 3\mathcal{L} + \frac{3}{2}\mathcal{D} > \mathcal{R}.$$

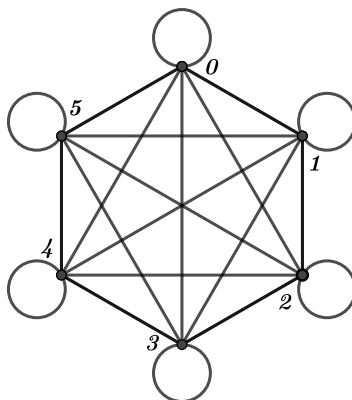


- 28.** Cada número del 1 al 10^6 se sustituye por la suma de sus cifras de manera repetida hasta que se obtiene un número de una sola cifra, por ejemplo: $13 \rightarrow 4$, $39 \rightarrow 12 \rightarrow 3$. Al final de este proceso, ¿habrá más unos que doses?

Solución. Al final del proceso, cada número queda sustituido por el representante, comprendido entre 1 y 9, de la clase de *restos módulo 9* a la que pertenece. Entonces, es fácil ver que del 1 al 999.999 habrá el mismo número de unos que de doses (que de treses, que de cuatros, ..., que de nueves). Como $10^6 \equiv 1 \pmod{9}$, al final hay 111.112 unos y 111.111 doses, es decir, hay un uno más.

- 29.** Los jugadores de *dominó* saben que con las 28 fichas usuales, que van desde la *blanca doble* 0 – 0 al *seis doble* 6 – 6, y con la regla usual de yuxtaposición de fichas se puede formar una única fila, que puede comenzar además por cualquier ficha. ¿Se puede hacer lo mismo si nos quedamos sólo con las fichas que no tienen ningún *seis*?

Solución. El problema admite una traducción inmediata a un problema de *grafos* (ver la figura). La línea que va del *vértice* i al j ($i, j = 0, 1, \dots, 5$) corresponde a la pieza $i - j$ del dominó, y la línea circular en el vértice i ($i = 0, 1, \dots, 5$) corresponde a la pieza doble $i - i$.



Una disposición de todas las piezas en fila con la regla usual de que los extremos de dos piezas en contacto tengan valores iguales es idéntica a un recorrido completo del grafo mediante un camino continuo que no pase dos veces por una misma línea.

Una regla clásica sobre trazado de grafos, que Leonhard Euler fue el primero en exponer en su famoso análisis del *problema de los siete puentes de Königsberg*, es que la condición necesaria y suficiente para que un grafo pueda ser recorrido completamente, pasando por todas sus *aristas* y sólo una vez por cada una, es que, o bien todos los vértices sean *pares* (es decir, en cada uno concurre un número par de líneas), o bien, de haber vértices *impares*, que estos sean exactamente dos. En el primer caso el recorrido será siempre cerrado y terminará en el vértice donde empezó. En el segundo, el camino ha de empezar en uno de los vértices impares y terminar, necesariamente, en el otro. A esos caminos recorriendo las aristas de un grafo los llamamos hoy *recorridos eulerianos*.

Como en nuestro caso los seis vértices son impares (en cada uno concurren siete líneas, los bucles cuentan doble), el grafo no admite ningún recorrido euleriano y, por tanto, no hay ninguna forma de que las 21 piezas de dominó con las que nos hemos quedado puedan formar una sola hilera.

Otra demostración equivalente de la imposibilidad: en el juego completo de nuestras 21 piezas, cada dígito aparece 7 veces. La regla de igualdad de valores en las mitades de piezas en contacto implica que cada dígito se debe presentar un número par de veces *en el interior* de la hilera. Como la fila solo tiene dos extremos, solo dos de los vértices podrían agotar su representación en la hilera, de modo que la disposición en una única hilera es imposible.

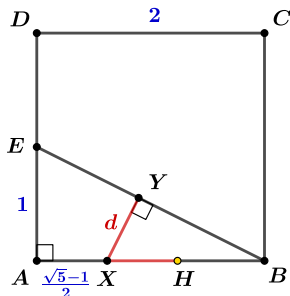
Lo más que podríamos hacer es recorrer el grafo con tres itinerarios disjuntos, o lo que es equivalente, formar tres cadenas distintas de piezas, en cuyos extremos deben aparecer los seis números 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

- 30.** Sea $ABCD$ un cuadrado. En el lado AB se toma el punto H que cumple $AB \cdot BH = AH^2$. Sean E y X los puntos medios de los segmentos AD y AH respectivamente. Llamemos Y al punto del segmento EB tal que XY es perpendicular a EB . Demuestra que $XY = XH$.

Solución. Vamos a tomar, por ejemplo, que sea el lado del cuadrado $AB = 2$. La condición

que define el punto H , si denotamos $AH = x$, se traduce en la ecuación de segundo grado $x^2 = 2(2 - x)$, cuya única solución positiva es $x = \sqrt{5} - 1$.

De modo que $AX = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, y $XB = 2 - AX = 2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$.



Por otro lado, los triángulos rectángulos BEA y BXY son semejantes, y se deduce, si ponemos $XY = d$,

$$\frac{EB}{EA} = \frac{XB}{XY}, \quad \text{es decir,} \quad \sqrt{5} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2d},$$

de donde resulta $d = \frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = AX = XH$, como se proponía.

- 31.** Se quiere expresar el número 2020 como la suma de uno o más números enteros positivos, ordenados en orden no decreciente, y además cumpliendo la condición de que la diferencia entre el último sumando y el primero sea como máximo una unidad. ¿De cuántas maneras distintas se puede hacer eso?

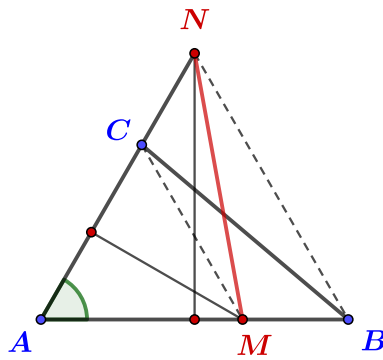
Solución. Consideremos cualquiera de los números k tales que $1 \leq k \leq 2020$. La división entera de 2020 entre k nos da un cociente q y un resto r , $0 \leq r \leq k - 1$, cumpliéndose que $2020 = kq + r$. Entonces,

$$2020 = (k - r)q + (q + 1)r,$$

de modo que $k - r$ sumandos iguales a q y r sumandos iguales a $q + 1$ suman 2020. De modo que para cada valor de k hay una descomposición de 2020 en sumandos del tipo requerido, que es única. Luego hay exactamente 2020 maneras de hacer lo que se plantea.

- 32.** En el triángulo ABC el ángulo en el vértice A es de 60° . La perpendicular al segmento AB en su punto medio corta a la recta AC en el punto N , y la perpendicular al segmento AC en su punto medio corta a la recta AB en el punto M . Probar que el segmento MN mide lo mismo que el lado BC .

Solución. La perpendicular a un segmento PQ en su punto medio es la *mediatriz* del segmento, y sus puntos equidistan de los extremos del segmento. Entonces $NA = NB$, luego el triángulo ANB es isósceles. Como además $\angle BAN = 60^\circ$, el triángulo ANB es equilátero.



De manera similar tenemos que $AM = AC$ y el triángulo AMC es equilátero. Entonces (ver figura), los triángulos ACB y AMN son iguales (lado-ángulo-lado). Luego $MN = BC$.