

Seminario de problemas Curso 2025-26. Hoja 4

28. Se suponen conocidas las raíces reales de n ecuaciones de segundo grado, que se indican a continuación

Ecuación	Raíces
$x^2 + a_1x + b_1 = 0$	x_0, x_1
$x^2 + a_2x + b_2 = 0$	x_0, x_2
$\dots$	$\dots$
$x^2 + a_nx + b_n = 0$	x_0, x_n

Encuentra, de manera razonada, las raíces de la ecuación

$$x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}x + \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} = 0.$$

Solución.

Notemos que, como x_0 es una raíz común a todas las ecuaciones, entonces

$$x_0^2 + a_k x_0 + b_k = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Sumando todas las ecuaciones, resulta

$$n x_0^2 + (a_1 + \dots + a_n)x_0 + (b_1 + \dots + b_n) = 0,$$

por lo que

$$x_0^2 + \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}x_0 + \frac{b_1 + \dots + b_n}{n} = 0,$$

y x_0 es una raíz de la ecuación dada.

Por otro lado, la otra raíz, que denotamos por z , debe verificar

$$z x_0 = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n},$$

pero, para cada k , $x_0 x_k = b_k$, por lo que

$$x_0(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

por lo que

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

29. Las raíces de la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ son tres enteros consecutivos. Encuentra el valor máximo de $\frac{a^2}{b+1}$.

Solución.

Sean $n - 1$, n y $n + 1$ las tres raíces de la ecuación. Entonces

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - (n - 1))(x - n)(x - (n + 1)) = x^3 - 3nx^2 + (3n^2 - 1)x - n^3 + n.$$

Identificando coeficientes, resulta $a = -3n$ y $b = 3n^2 - 1$. Por tanto,

$$\frac{a^2}{b + 1} = \frac{9n^2}{3n^2} = 3.$$

- 30.** Sean a , b y c números reales. Prueba que, si el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene tres raíces reales, entonces $3b \leq a^2$.

Solución.

Supongamos que α , β , γ son las tres raíces reales y, además, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Entonces

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\ &= x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

Así pues, $a = -\alpha - \beta - \gamma$ y $b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ ¹. Por lo tanto

$$\begin{aligned} a^2 - 3b &= (-\alpha - \beta - \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma \\ &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta + \gamma^2 + \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma \\ &= (\alpha - \beta)^2 + \gamma(\gamma - \alpha) + \beta(\alpha - \gamma) \\ &= (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) \geq 0. \end{aligned}$$

Este resultado es también consecuencia de la llamada *desigualdad del reordenamiento*.

Sean $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ dos sucesiones ordenadas de números reales

Desigualdad del reordenamiento

Para cualquier permutación $(b'_1, b'_2, \dots, b'_n)$ de la sucesión $\{b_j\}$, se tiene

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1 \leq a_1b'_1 + a_2b'_2 + \dots + a_nb'_n \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

Además, la igualdad a izquierda se verifica si y sólo si $b'_j = b_{n-j+1}$ y la igualdad derecha si y sólo si $b'_j = b_j$, $j = 1, \dots, n$.

Tomando $a_1 = b_1 = \alpha$, $a_2 = b_2 = \beta$ y $a_3 = b_3 = \beta$, resulta

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma \leq \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma),$$

de donde se sigue el resultado.

¹Estas identidades se conocen como las fórmulas de Cardano-Vieta

- 31.** Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ prueba que, si el cuadrado de una de sus raíces es igual al producto de las otras dos, entonces $a^3c = b^3$.

Solución.

Supongamos que α, β, γ son las tres raíces, de manera que $\alpha^2 = \beta\gamma$, entonces

$$\begin{aligned}x^3 + ax^2 + bx + c &= (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\&= x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma.\end{aligned}$$

Igualando coeficientes, obtenemos

$$a = -(\alpha + \beta + \gamma), \quad b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma, \quad \gamma = -\alpha\beta\gamma.$$

Como $\alpha^2 = \beta\gamma$ resulta

$$\begin{aligned}b &= \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha^2 = \alpha(\alpha + \beta + \gamma) = -\alpha a, \\c &= -\alpha^3.\end{aligned}$$

De aquí, elevando al cubo, concluimos que

$$b^3 = (-\alpha a)^3 = -\alpha^3 a^3 = a^3 c.$$

- 32.** Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ y $Q(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Se sabe que las tres raíces de P son positivas y que las raíces de Q son los inversos de las raíces de P . Prueba que $a \cdot A \geq 9$, $b \cdot B \geq 9$.

Solución.

Si α, β, γ son las raíces de $P(x)$, entonces $1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma$ son las de $Q(x)$. Usando las fórmulas de Cardano-Vieta, se tiene

$$\begin{aligned}a &= -(\alpha + \beta + \gamma), & A &= -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right), \\b &= \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma, & B &= \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}.\end{aligned}$$

A la vista de las expresiones anteriores, basta probar que $a \cdot A \geq 9$, ya que la otra desigualdad es completamente análoga. Ahora bien,

$$a \cdot A = 3 + \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) + \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}\right).$$

Veamos que cada una de las expresiones entre paréntesis es mayor o igual que 2. En efecto,

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha\beta} \geq 0,$$

al ser las raíces positivas. Por tanto,

$$a \cdot A \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9.$$

El resultado también es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que dice lo siguiente.

Sean $a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_n$ números reales cualesquiera

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

Además, la igualdad se verifica si y sólo si existe un número real x tal que $a_k x + b_k = 0$ para cada $k = 1, \dots, n$.

En nuestro caso, sean $a_1 = \sqrt{\alpha}$, $a_2 = \sqrt{\beta}$, $a_3 = \sqrt{\gamma}$ y $b_1 = 1/a_1$, $b_2 = 1/a_2$, $b_3 = 1/a_3$. Entonces

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2.$$

Es decir

$$(\alpha + \beta + \gamma) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \geq 3^2 = 9.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz se demuestra fácilmente a partir de la siguiente observación

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0. \quad (1)$$

Ahora bien, desarrollando la expresión anterior se obtiene el siguiente polinomio de segundo grado en x

$$p(x) = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right) x + \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

Puesto que $p(x) \geq 0$ el discriminante de la ecuación $p(x) = 0$ no puede ser positivo y entonces

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \geq 0.$$

Por otra parte, la igualdad se cumple si y sólo si todos los sumandos en (1) son iguales a 0, es decir, si existe x tal que $a_k x + b_k = 0$ para cada k .

- 33.** Prueba que, si $x, y, z \geq 0$ y $x + y + z \leq 3$, entonces $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$.

Solución.

Este resultado se prueba de la misma manera que el problema anterior. De hecho, se tiene

$$3 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq (x + y + z) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9,$$

de donde se sigue el resultado.

- 34.** Sean x_1 y x_2 las raíces del polinomio $P(x) = 3x^2 + 3mx + m^2 - 1$, siendo m un número real. Prueba que $P(x_1^3) = P(x_2^3)$.

Solución.

Por ser x_1 y x_2 raíces, se cumple

$$3x_1^2 + 3mx_1 + m^2 - 1 = 0, \quad 3x_2^2 + 3mx_2 + m^2 - 1 = 0.$$

Multiplicando la primera ecuación por x_1 , la segunda por x_2 , y sumando, resulta

$$3(x_1^3 + x_2^3) + 3m(x_1^2 + x_2^2) + (m^2 - 1)(x_1 + x_2) = 0.$$

Por otra parte, por la fórmulas de Cardano-Vieta, se tiene $x_1 + x_2 = -m$, $x_1x_2 = (m^2 - 1)/3$, y entonces

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= -m((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) - \frac{1}{3}(m^2 - 1)(x_1 + x_2) \\ &= -m(m^2 - \frac{2}{3}(m^2 - 1)) + \frac{1}{3}m(m^2 - 1) = -m. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$P(x_1^3) - P(x_2^3) = 3(x_1^6 - x_2^6) + 3m(x_1^3 - x_2^3) = 3(x_1^3 - x_2^3)(x_1^3 + x_2^3 + m) = 0.$$

- 35.** Resolver, en el conjunto de los números reales, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 &= 0, \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 &= 0, \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Solución.

En primer lugar, observemos que $6t^2 - 12t - 8 > 0$, para todo valor de t , lo que implica que cualquier solución (x_0, y_0, z_0) verifica $x_0, y_0, z_0 > 0$. Por otra parte, el sistema de ecuaciones se puede escribir también como

$$\begin{aligned} y^3 - x^3 + (x - 2)^3 &= 0, \\ z^3 - y^3 + (y - 2)^3 &= 0, \\ x^3 - z^3 + (z - 2)^3 &= 0. \end{aligned}$$

Sumando las tres ecuaciones se llega a

$$(x - 2)^3 + (y - 2)^3 + (z - 2)^3 = 0. \quad (2)$$

Ahora distinguimos dos casos:

- a) Si $x_0 \geq 2$, de la última ecuación del sistema obtenemos

$$x_0^3 = 6z_0^2 - 12z_0 + 8 \geq 8 \Leftrightarrow 6z_0(z_0 - 2) \geq 0,$$

por lo que $z_0 \geq 2$. Análogamente, $y_0 \geq 2$. Ahora bien, como se tiene que cumplir (2), solo puede ser $x_0 = y_0 = z_0 = 2$.

- b) Si $0 < x_0 < 2$, entonces tenemos

$$x_0^3 = 6z_0^2 - 12z_0 + 8 < 8 \Leftrightarrow 6z_0(z_0 - 2) < 0,$$

por lo que $0 < z_0 < 2$. Análogamente, $0 < y_0 < 2$. Pero entonces (2) no se puede verificar y, en este caso, no hay solución.

Por tanto, la única solución real del sistema es $x_0 = y_0 = z_0 = 2$.