Seminario de problemas Curso 2024-25. Hoja 4

32. Dado n, un número natural, calcula el valor de la suma

$$\left\lfloor \sqrt{1\cdot 2} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{2\cdot 3} \right\rfloor + \cdots \left\lfloor \sqrt{n\cdot (n+1)} \right\rfloor,$$

donde $\lfloor x \rfloor$ significa el mayor entero que es más pequeño que x.

Solución.

Notemos que, para $k \geq 1$,

$$\sqrt{k\cdot k} < \sqrt{k\cdot (k+1)} < \sqrt{(k+1)\cdot (k+1)} \Rightarrow k < \sqrt{k\cdot (k+1)} < k+1.$$

Por tanto, $\left\lfloor \sqrt{k\cdot (k+1)} \right\rfloor = k$ y, entonces,

$$\left\lfloor \sqrt{1\cdot 2} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{2\cdot 3} \right\rfloor + \cdots \left\lfloor \sqrt{n\cdot (n+1)} \right\rfloor = 1+2+\cdots+n = \frac{n\cdot (n+1)}{2}.$$

33. Determina todos los pares (x, y) de enteros positivos que verifican

$$x^2 - 8x + y^2 + 4y = 5.$$

Solución.

Completando cuadrados en el miembro izquierdo de la igualdad, resulta

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 5 + 16 + 4 = 25.$$

De aquí se obtienen las siguientes opciones:

$$\begin{array}{ll} x-4=0 & y+2=\pm 5; \\ x-4=\pm 3 & y+2=\pm 4; \\ x-4=\pm 4 & y+2=\pm 3; \\ x-4=\pm 5 & y+2=0. \end{array}$$

Teniendo en cuenta que x, y son enteros positivos, las únicas soluciones válidas son las siguientes

$$(4,3) \quad (1,2) \quad (7,2) \quad (8,1).$$

34. Prueba que para todo $x, y \geq 1$ se cumple que

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}.$$

Solución.

La desigualdad dada es equivalente a

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} - \frac{2}{1+xy} \geq 0.$$

Ahora bien, reduciendo a común denominador la parte izquierda de la desigualdad y simplificando, resulta

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}-\frac{2}{1+xy}=\frac{(x-y)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)}.$$

De aquí se deduce que la desigualdad es cierta si $xy-1\geq 0$, lo que se cumple al ser $x,y>1$.

35. Encuentra todas las cuaternas de números enteros positivos (p,q,r,s) que cumplen, al mismo tiempo, que $pq=rs$ y $p+q+r+s$ es primo.

Solución.

Sea $t=p+q+r+s$. Entonces

$$p=t-q-r-s.$$

Sustituyendo en la igualdad $pq=rs$, resulta

$$(t-q-r-s)q=rs \Rightarrow qt=rs+q^2+qr+qs=(q+r)(q+s).$$

De aquí se deduce que t no puede ser un número primo, pues tanto $q+r$ como $q+s$ son mayores que q y al menos uno de sus divisores primos (tanto de $p+q$, como de $p+s$) debe dividir a t, por lo cual t es compuesto. En consecuencia, no existe ninguna cuaterna con las características pedidas.

36. Determina el menor entero $n>1$ tal que el producto de todos los divisores positivos de n sea igual a n^4.

Solución.

Observemos que si d uno de los divisores de n, entonces n/d es otro divisor. De aquí deducimos que n tiene 8 divisores, que podemos escribir de la forma

$$d_1,d_2,d_3,d_4,\frac{n}{d_1},\frac{n}{d_2},\frac{n}{d_3},\frac{n}{d_4}.$$

Multiplicando todos ellos, es evidente que su producto es n^4.

Por otra parte, el total de divisores de un número n, cuya descomposición en factores primos es de la forma $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, viene dado por

$$\text{número de divisores}(n)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k).$$

Puesto que este producto tiene que ser 8 y $(1+\alpha_k)\geq 2$, las únicas posibilidades que hay son las siguientes:

$$n=p_1^7,\quad n=p_1^3p_2,\quad n=p_1p_2p_3.$$

Buscando el menor valor en cada uno de los casos, en el primero obtenemos $n=2^7=128$, en el segundo $n=2^3\cdot 3=24$ y, en el tercero, $n=2\cdot 3\cdot 5=30$. Así, el menor n que satisface los requisitos es $n=24$.

37. La sucesión de números $\{x_n\}_{n\geq 0}$ está definida recursivamente de la siguiente manera:

$$x_0 = 0, \qquad x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 + 4}.$$

Demuestra que todos los términos de la sucesión son enteros.

Solución.

Calculando los primeros términos de la sucesión vemos que

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 30, \quad x_4 = 112$$

que, como piden probar, son todos enteros. De la expresión de la recurrencia se sigue que, si x_n es entero, para que x_{n+1} lo sea, ha de cumplirse que $3x_n^2 + 4$ es un cuadrado perfecto. Procedamos por inducción y supongamos que, para $0 \leq k \leq n-1$, se verifica $3x_k^2 + 4 = z_k^2$ para algún $z_k \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$3x_n^2 + 4 = 3\left(2x_{n-1} + \sqrt{3x_{n-1}^2 + 4}\right)^2 + 4 = 21x_{n-1}^2 + 12x_{n-1}\sqrt{3x_{n-1}^2 + 4} + 16.$$

Reagrupando convenientemente, resulta

$$3x_n^2 + 4 = 4(3x_{n-1}^2 + 4) + 9x_{n-1}^2 + 12x_{n-1}\sqrt{3x_{n-1}^2 + 4} = (2z_{n-1} + 3x_{n-1})^2,$$

donde hemos tenido en cuenta la hipótesis de inducción de que $3x_{n-1}^2 + 4 = z_{n-1}^2$. Así pues, $3x_n^2 + 4$ también es un cuadrado perfecto y x_{n+1} es también entero.

Otra manera de probar el resultado es darse cuenta de que, de los primeros términos de la sucesión, parece deducirse que

$$x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}.$$

Si probamos esta igualdad, es evidente que si los dos primeros términos de la sucesión son enteros, todos los demás van a serlo. Ahora bien, de la ecuación de recurrencia se deduce que

$$(x_{n+1} - 2x_n)^2 = 3x_n^2 + 4 \Rightarrow x_n^2 - 4x_n x_{n+1} + x_{n+1}^2 - 4 = 0.$$

De aquí resulta

$$x_n = 2x_{n+1} - \sqrt{3x_{n+1}^2 + 4}.$$

Por tanto,

$$x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 + 4}, \qquad x_{n-1} = 2x_n - \sqrt{3x_n^2 + 4}.$$

Sumando ambas expresiones

$$x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1},$$

como queríamos probar.

38. Sabiendo que 9^{4000} tiene 3817 dígitos y que empieza por 9, ¿cuántos números de la forma 9^k, con $0 \leq k \leq 4000$ y k un entero, empiezan por 9?

Solución.

Para encontrar la solución del problema, observamos que el número de cifras de un número aumenta en una unidad al multiplicarlo por 9, salvo en un caso. Este se produce cuando el nuevo número obtenido empieza por 9. En efecto, si el nuevo número es $9a_1a_2\cdots a_k$, aplicando el algoritmo de la divisón, el cociente es un número con el mismo número de dígitos, empezando por 1. Por tanto, habrá tantos números empezando por 9 como veces no cambia el número de cifras al multiplicar reiteradamente por 9. Como hemos hecho 4000 multiplicaciones y el último número tiene 3817 cifras, habrá $4000-3817$ veces que no aumenta el número de dígitos, esto es 183. Como nos dicen que 9^{4000} empieza por 9, habrá 184 números que empiezan por 9.

39. Sean A y B dos conjuntos disjuntos cuya unión es el conjunto de todos los números naturales. Prueba que, para todo número natural n, existen $a, b > n$ distintos tales que

$$\{a, b, a+b\} \subseteq A \quad \text{o} \quad \{a, b, a+b\} \subseteq B.$$

Solución.

Si alguno de los dos conjuntos A o B es finito, por ejemplo A, tendrá un elemento máximo. Si este elemento es n, entonces todos los números mayores que n están en B, por lo que es evidente que se cumple la propiedad pedida. Bastaría tomar $a = n+1$, $b = n+2$, $a+b = 2n+3$ y los tres están en el conjunto B. Así pues, asumiremos que tanto A como B son infinitos.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y elijamos a, b, c en A de manera que $a > b > c > n$ y $b-c > n$. Esto es posible, puesto que A es infinito y, por consiguiente, no acotado. Consideremos ahora los 4 números

$$a+b, \quad a+c, \quad b+c, \quad b-c,$$

todos mayores que n. Si alguno de ellos está en A, ya hemos demostrado la propiedad. Si no, los cuatro están en B y también se cumple la propiedad.

40. Te proponen un juego con un conjunto de 6 elementos $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Cada día debes elegir dos subconjuntos, B y C, de manera que su unión dé como resultado el conjunto total, A. Por ejemplo, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{a, d, e, f\}$, ya que $B \cup C = \{a, b, c, d, e, f\} = A$. Si empiezas a jugar el 1 de enero de 2025, y no puedes repetir ninguna de tus elecciones, ¿cuándo acabarás de jugar?

Solución.

Pensemos en un elemento cualquiera del conjunto A. Con él tenemos tres opciones:

1. Colocarlo solo en B.
2. Colocarlo solo en C.
3. Colocarlo tanto en B como en C.

Teniendo esto en cuenta, habría 3^6 posibles elecciones de los dos subconjuntos. Ahora bien, por la simetría, da lo mismo (B, C), que (C, B), por lo que cada elección está contada dos veces, salvo el caso en que $B = C$. Ahora bien, en este caso, como $B \cup C = A$, debe ser $B = C = A$, lo que solo representa una elección. Por tanto, el total de subconjuntos elegibles con la propiedad requerida es

$$\frac{3^6 - 1}{2} + 1 = 365.$$

Es decir, si empiezas a jugar el 1 de enero de 2025, acabarás de jugar el 31 de diciembre del mismo año.