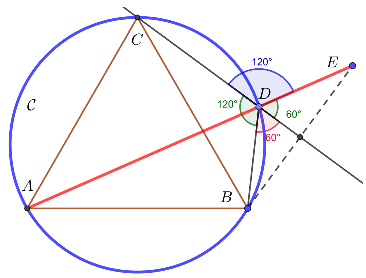
Seminario de problemas. Curso 2022-23. Hoja 4. Solución

26. Un triángulo equilátero ABC está inscrito en la circunferencia $\mathcal{C}$. Un punto D está en el arco BC de $\mathcal{C}$. El punto E es el simétrico de B con respecto a la recta CD. Probar que A, D y E son colineales.



Solución. El cuadrilátero $ABDC$ es cíclico lo que implica que $\angle BDC = 180° - \angle CAB = 120°$. Por simetría, $\angle BDC = \angle EDC = 120°$, de donde $\angle BDE = 120°$. Además, $\angle ACB = \angle ADB = 60°$ porque los dos ángulos están sustentados en el mismo arco. Por tanto,

$$\angle ADB + \angle BDE = 60° + 120° = 180°$$

o sea, los puntos A, D y E son colineales.

27. Sean x_1, x_2 las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ y x_3, x_4 las de $x^2 + p'x + q' = 0$, donde $pp'qq' \neq 0$. Probar que si $x_1x_4 = x_2x_3$, entonces $\left(\frac{p}{p'}\right)^2 = \frac{q}{q'}$.

Solución. Se tiene, por las ecuaciones de Cardano-Vieta,

$$x_1x_4 = x_2x_3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_2} = \frac{x_3 + x_4}{x_4} \Leftrightarrow \frac{p}{x_2} = \frac{p'}{x_4}$$

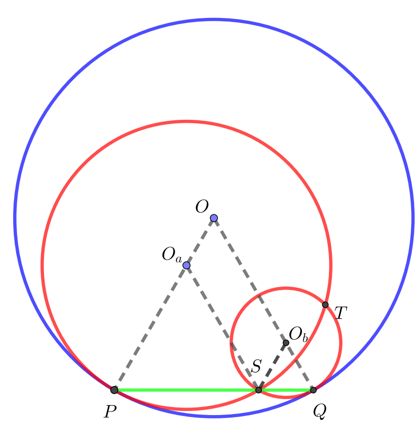
De donde, usando nuevamente la hipótesis $x_1x_4 = x_2x_3$ y las ecuaciones de Cardano-Vieta,

$$\left(\frac{p}{p'}\right)^2 = \left(\frac{x_2}{x_4}\right)^2 = \frac{x_1x_2}{x_3x_4} = \frac{q}{q'}.$$

28. Dentro de una circunferencia de radio mayor, r, se dibujan dos circunferencias de radio menor a y b, como se muestra en la figura. Las dos circunferencias de radio menor son tangentes a la circunferencia mayor en los puntos P y Q. Las circunferencias menores se intersecan en los puntos S y T. Si los puntos P, S y Q son coliniales (están en una recta), probar que

$$r = a + b.$$

Solución. Sea O el centro de la circunferencia mayor y OP y OQ los radios asociados a los puntos de tangencia P y Q, respectivamente. Entonces los centros de las circunferencias pequeñas O_a y O_b están sobre dichos radios. Los triángulos OPQ, O_aPS y O_bSQ son isósceles y semejantes. Como dos de sus lados están sobre la misma recta, los terceros son paralelos. Así, OO_aSO_b es un paralelogramo, con los segmentos OO_a y O_bS de igual longitud, b. Por tanto,



$$r = OO_a + O_aP = O_bS + +O_aP = b + a.$$

29. Hallar el mínimo de $a+b^{2022}$ cuando a, b son números positivos cuyo producto es 1.

Solución. Como $ab = 1$ y aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, se tiene

$$a+b^{2022} = a+\frac{1}{a^{2022}} = 2022\frac{a}{2022}+\frac{1}{a^{2022}}$$
$$\geq 2023\sqrt[2023]{\frac{a^{2022}}{2022^{2022}a^{2022}}} = 2023\sqrt[2023]{\frac{1}{2022^{2022}}}$$

Hay igualdad en la desigualdad anterior si y solo si

$$\frac{a}{2022} = \frac{1}{a^{2022}} \Leftrightarrow a = \sqrt[2023]{2022}.$$

En este caso, $b = \frac{1}{\sqrt[2023]{2022}}$.

Nota. La desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética es: «Se tiene

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

cualquiera sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos».

La demostración de esta desigualdad se puede hacer primero para $n = 2^k$ por inducción en k. Después, una vez que sabemos que vale para $n = 2^k$, si $2^{k-1} < n < 2^k$, definimos

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{2^k} = L,$$

donde $L = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. Entonces

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{2^k}}$$

de donde

$$\frac{nL+(2^k-n)L}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \ldots a_n L^{2^k-n}} \quad L^{n/2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

que equivale a desigualdad

$$L = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Nota. Este problema también se puede resolver con derivada. Sea $f(a) = a+\frac{1}{a^{2022}}$. Se tiene

$$f'(a) = 1-\frac{2022}{a^{2023}},$$

$f'(a) < 0$ si $0 < a < \sqrt[2023]{2022}$, mientras que $f'(a) < 0$ si $a > \sqrt[2023]{2022}$ y $f'(a)$ se anula en $a = \sqrt[2023]{2022}$. De modo que f tiene un mínimo absoluto en $x = \sqrt[2023]{2022}$.

30. Sean a, b y c números reales positivos tales que

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = 1011\sqrt{2}.$$

Hallar el mínimo de

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}.$$

Solución. Se tiene

$$\sqrt{a+b} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$$

porque

$$2(a+b) \geq a + 2\sqrt{ab} + b \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$$

De donde,

$$\begin{aligned}\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{c}+\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \\ = \sqrt{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) = 2022\end{aligned}$$

Es decir, el mínimo buscado es 2022 y se alcanza cuando $a = b = c = \frac{1011^2 2}{3^2}$.

Nota. La desigualdad utilizada es un caso particular de la desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales se tiene

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

31. En un torneo participan 6 equipos, cada uno de ellos juega con otro exactamente una vez. Un equipo obtiene 3 puntos cuando gana, 1 punto cuando empata y 0 puntos cuando pierde. Después del torneo, la suma de los marcadores de todos los equipos es 41. Prueba que existe un grupo de 4 equipos donde cada cada uno de ellos ha empatado al menos una vez. Demuestra, además, que hay tres equipos en los que todos los partidos entre ellos han terminado en empate o todos los partidos ha habido un ganador.

Solución. El total de partidos que tienen lugar es

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15.$$

Sea x la cantidad de partidos que terminan en empate. Como esos partidos se reparten 2 puntos y en el resto se dan 3 puntos (3 para el ganador y cero para el resto), se tiene

$$2x + 3(15 - x) = 41 \Leftrightarrow x = 4.$$

En estos cuatro empates no pueden haber intervenido solo tres equipos porque tres equipos juegan tres partidos entre ellos. De modo que existe un grupo de 4 equipos que cada uno ha empatado un partido.

Para probar la segunda parte consideremos 6 puntos en una circunferencia asociados a cada equipo y los uniremos con una cuerda de color azul si los equipos han empatado su encuentro y rojo si ha habido un ganador. Se trata de probar que hay un triángulo monocromático en este grafo. Fijemos un vértice A, de él salen 5 cuerdas, por lo menos tres tienen el mismo color; para fijar ideas, supongamos que las hay salen hay tres cuerdas que parten de A de color azul. Consideremos tres de los vértices, B, C, D, donde llegan esas cuerdas de color azul; si alguna de las cuerdas que los unen, por ejemplo BC, es azul, entonces ya hemos encontrado un triángulo de color azul, ABC. Si todas las cuerdas que unen a los vértices B, C, D son rojas, entonces también tenemos un triángulo monocromáticos.

32. Determinar todos los pares de números enteros (x, y) tales que

$$x^4 - x + 1 = y^2.$$

Solución. Consideramos cuatro casos: $x \leq -1$, $x = 0$, $x = 1$ y $x \geq 2$.

Cuando $x = 0$, $x^4 - x + 1 = 1$, de modo que la ecuación tiene soluciones $(x, y) = (0, \pm 1)$.

Cuando $x = 1$, $x^4 - x + 1 = 1$, de modo que la ecuación tiene soluciones $(x, y) = (1, \pm 1)$.

Supongamos que $x \leq -1$, entonces $-x + 1 > 0$ y $x^4 - x + 1 > x^4 = (x^2)^2$. También $-x + 1 < 2x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 < x(2x + 1)$, de modo que $x^4 - x + 1 < x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$. Por tanto, cuando $x \leq -1$, se tiene

$$(x^2)^2 < x^4 - x + 1 < (x^2 + 1)^2,$$

o sea, $x^4 - x + 1$ está entre dos cuadrados consecutivos y la ecuación propuesta no tiene solución entera para esos valores de x.

Veamos que tampoco tiene solución si $x \geq 2$. En este caso, $-x + 1 < 0$ y $x^4 - x + 1 < (x^2)^2$. Por otra parte, se tiene $-x + 1 > -2x^2 + 1$ porque $x(-2x + 1) < 0$; de donde, $x^4 - x + 1 > x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$. Por tanto, cuando $x \geq 2$, se tiene

$$(x^2 - 1)^2 < x^4 - x + 1 < (x^2)^2,$$

o sea, $x^4 - x + 1$ está entre dos cuadrados consecutivos y la ecuación propuesta no tiene solución entera para esos valores de x.

Nota. $x = -\frac{3}{4}$, $y = \pm\frac{23}{16}$; son soluciones racionales de la ecuación. Estas soluciones se obtienen considerando

$$x = 1 + u, \quad y = \pm(u^2 + bu + c) = \pm(u^2 + 2u - 1),$$

y los valores de b, c se buscan de modo que nos quede una ecuación lineal de u. Observar que se ha partido de una solución particular $x = x_0 + u$, $y = \pm(au^2 + bu + a)$, donde los coeficientes a, b, c se toman de modo que se llega a una ecuación lineal en u.

Otra posibilidad es considerar $x = 1 + u$, $y = 1 + \frac{3}{2}u \pm \frac{15}{8}u^2$, que lleva a $u = -\frac{23}{8}$, $u = \frac{77}{8}$.

Lo importante es llegar a una ecuación en u que tenga solución racional; por ejemplo, lineal en u.

33. Probar que si n es un número natural mayor o igual que 3, a cada divisor de $n!$ diferente de $n!$ se le puede adicionar un divisor de $n!$ de modo que se obtiene otro divisor de $n!$. Recuerda que $n!$ es el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n.

Solución. En la demostración vamos a utilizar el principio de inducción matemática.

Si $n = 3$, $n! = 6$; sus divisores diferentes de 6 son 3, 2 y 1. Se tiene que $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$ y $3 + 3 = 6$ son divisores de $3!$.

Supongamos que la afirmación es cierta para un cierto número $n \geq 3$, comprobemos que ella también es válida para $n + 1$. Sea d un divisor de $(n + 1)!$, con $d < (n + 1)!$. Entonces

$$d = ab,$$

donde a divide a $n!$ y b divide a $n + 1$.

Supongamos que $a < n!$. Entonces, por la hipótesis, existe c un divisor de $n!$ tal que $a+c$ divide también a $n!$. De modo que bc es un divisor de $(n+1)!$ y

$$d + bc = ab + bc = b(a+c)$$

también divide a $(n+1)!$.

Si $a = n!$, entonces $b < n+1$. Cuando $b = 1$, entonces

$$d + (n-1)! = n! + (n-1)! = (n-1)!(n+1),$$

que es un número que divide a $(n+1)!$ y también $(n-1)!$ divide a $(n+1)!$. Si $1 < b < n+1$, entonces $n+1 = a'b$, con $2 \leq a', b \leq n$. Se tiene $n!/b$ es un divisor de $n!$ distinto de $n!$, de modo que existe c un divisor de $n!$ tal que $n!/b + c$ divide a $n!$

$$d + bc = (\frac{n!}{b} + c)b,$$

con $(\frac{n!}{b} + c)$ un divisor de $n!$ y b un divisors de $n+1$, por tanto, d y $d+bc$ son divisores de $(n+1)!$.