

Seminario de problemas Curso 2019-20. Hoja 4. Soluciones

44. Prueba que si n es impar entonces para cualquier permutación p del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ se verifica que el producto

$$P(p) = (1 - p(1))(2 - p(2)) \cdots (n - p(n))$$

es par.

Solución

La única manera de que el producto P sea un número impar es que todos sus factores sean impares. Para que eso suceda, debemos emparejar cada uno de los $p(k)$ con un número de distinta paridad. Ahora bien, hay $n + 1$ números impares en la permutación y solo n números pares, por lo que algún impar debería emparejarse con dos números pares (principio del palomar). Como eso no es posible, ya que dos números distintos no pueden tener la misma pareja, quiere decir que hay al menos dos números impares emparejados. Como su diferencia es un número par, el producto final es par.

45. Prueba que existe al menos un número con sus cifras iguales a 1 y 3, al menos una de cada, que es múltiplo de 2019.

Solución

Hay muchas posibilidades para construir un número que cumpla los requisitos del problema. Vamos a construir uno de ellos. Empecemos por tomar los siguientes 2019 números

$$13, 1313, 131313, \dots, \underbrace{1313 \cdots 13}_{2019 \text{ veces}}.$$

Si alguno de ellos es múltiplo de 2019 hemos terminado, pero si no, habrá dos que dejen el mismo resto al dividirlos por 2019. Esto es así, ya que, una vez excluido el resto 0, tendríamos 2019 números y 2018 restos diferentes. Por el principio del palomar dos de ellos dejan el mismo resto. Sean dichos números los siguientes

$$\underbrace{1313 \cdots 13}_{k \text{ veces}}, \quad \underbrace{1313 \cdots 13}_{j \text{ veces}}, \quad k > j.$$

Entonces la diferencia entre ambos números será múltiplo de 2019. Es decir el número

$$\underbrace{1313 \cdots 13}_{k \text{ veces}} - \underbrace{1313 \cdots 13}_{j \text{ veces}} = \underbrace{1313 \cdots 13}_{k-j \text{ veces}} \underbrace{0 \cdots 0}_{j \text{ veces}} = \underbrace{1313 \cdots 13}_{k-j \text{ veces}} \cdot 10^j$$

es múltiplo de 2019. Como 2019 y 10 son primos entre sí ($\text{m.c.d.}(2019, 10) = 1$), tiene que verificarse que el primer factor del número anterior es múltiplo de 2019. Es decir

$$\underbrace{1313 \cdots 13}_{k-j \text{ veces}} = \overline{2019}.$$

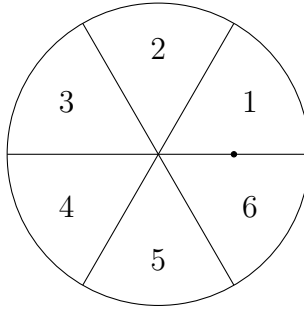
Usando el mismo razonamiento pueden construirse otros números con las cifras iguales a 1 y a 3 que son múltiplo de 2019. Por ejemplo, un número de la forma $3111 \cdots 1$ o $1333 \cdots 3$ o $11 \cdots 133 \cdots 3$, etc.

- 46.** Dados 6 puntos en el interior de un círculo de radio 1, prueba que siempre hay dos que están a distancia menor o igual que 1.

Solución

El problema parece que requiere de 5 palomares, en uno de los cuales tendríamos 2 puntos a distancia menor o igual que 1. Ahora bien, sabemos cómo construir 6 palomares donde las distancias entre dos puntos dentro del mismo palomar es menor o igual que 1. Para ello, basta dividir el círculo en 6 sectores iguales.

Parece que no podemos concluir nada con esta división. Sin embargo, siempre podemos hacer que uno de los diámetros usados pase por uno de los 6 puntos que nos han dado, como se ve en la figura.



Si uno de los 5 puntos restantes está en el sector 1 o en el sector 6, entonces se encuentra a distancia menor o igual que uno del punto de la figura. En caso de que no sea así, los 5 puntos restantes estarán en los sectores 2, 3, 4 y 5. Como son solo 4 sectores, por el principio del palomar, habrá dos puntos en el mismo sector y, por tanto, a distancia menor o igual que 1.

- 47.** En una de las esquinas de un tablero de ajedrez 8×8 hay escrito un 1, mientras que en el resto de casillas hay escrito un 0. Ahora, podemos elegir un cuadrado 3×3 o uno 4×4 y sumar 1 a cada uno de los números del cuadrado elegido. Si podemos repetir el procedimiento cuantas veces queramos, ¿es posible conseguir que todos los números del tablero sean divisibles por 2? ¿y que sean divisibles por 3?

Solución

Veamos que esto es imposible, en cualquiera de los dos casos. Podemos pensar en la suma de los valores que hay en cada casilla módulo 2, en el caso de que queramos que todos los números sean pares al final del proceso. Esta cantidad permanecería invariante si, en cada paso, sumáramos un número par. Esto no es problema si añadimos 1 a todos los números de un cuadrado 4×4 , ya que en ese caso añadiríamos 16, que es un número par. Sin embargo, un cuadrado 3×3 añade 9, que es impar. Por este motivo, en lugar de sumar los números en todas las casillas, sumamos los de todas las filas excepto las filas 3 y 6 (como en la figura), módulo 2. Es decir, tomamos

$$S = F_1 + F_2 + F_4 + F_5 + F_7 + F_8 \pmod{2}.$$

F_8								
F_7								
F_6								
F_5								
F_4								
F_3								
F_2								
F_1								

De este modo, cualquier cuadrado 3×3 que elijamos tendrá una y solo una de sus filas coloreada de gris, mientras que un cuadrado 4×4 tendrá una o dos filas grises. En cualquier caso, si elegimos un cuadrado 3×3 , S aumentará en 6 y quedará invariante módulo 2. De la misma manera, S también queda invariante si escogemos un cuadrado 4×4 . Como inicialmente $S = 1$, no podremos conseguir que todos los números del tablero sean pares ya que, de serlo, tendríamos $S = 0$.

Un argumento similar se puede usar para el caso en que todos los números sean múltiplos de 3. Ahora, suponiendo que el 1 se encuentra en la esquina superior izquierda, bastaría tomar

$$S = F_1 + F_2 + F_3 + F_5 + F_6 + F_7 \pmod{3}.$$

Es fácil comprobar que S es invariante y, por lo tanto, es imposible conseguir que todos los números sean múltiplos de 3.

- 48.** En una importante convención sobre el clima se han juntado 2019 representantes de todo el mundo. Algunos de ellos están manifiestamente enemistados entre sí, pero se sabe que ninguno de ellos tiene más de tres enemigos. ¿Es posible dividirlos en dos grupos de trabajo, de manera que ninguno de los representantes tenga más de un enemigo en el grupo en el que está?

Solución

Hagamos inicialmente una división de los 2019 representantes en dos grupos, A y B , como queramos. Como lo hemos hecho a nuestro parecer, seguramente habremos incumplido la regla y habrá representantes que tengan más de un enemigo en su grupo. Para ver nuestro grado de incumplimiento, consideramos el siguiente parámetro

$$E = \sum_{k=1}^{2019} \text{nº enemigos del representante } k \text{ dentro de su grupo.}$$

Ahora, haremos algo evidente. Si hay algún miembro que tiene más de un enemigo en el grupo en el que está, lo cambiamos al otro grupo. Haciendo esto, E disminuye. En efecto, si la persona que cambiamos tenía 2 enemigos en su grupo y la movemos al otro grupo, puede que sucedan dos cosas:

1. En el nuevo grupo tiene un enemigo. En este caso E se ve modificada por el cambio de enemigos de 4 personas. La que se mueve, sus 2 enemigos en el grupo en el que estaba y su enemigo en el grupo al que se cambia. Quien se mueve pierde dos enemigos y gana 1; sus enemigos en el grupo inicial pierden un enemigo cada uno; y su enemigo en el nuevo grupo gana uno. Por tanto, E disminuye en 2.

2. En el nuevo grupo no tiene enemigos. En este caso, puede verse que E disminuye en 4.

Si la persona que cambiamos tenía 3 enemigos en su grupo, al cambiarla, E disminuye en 6. Así pues, sea como sea, al cambiar a un representante que tiene dos o más enemigos en su grupo, E disminuye. Como E no puede hacerse negativa, después de un número finito de pasos habremos llegado a la partición deseada, donde cada representante no tiene más de un enemigo en su grupo.

49. En una pizarra están escritos los números del 1 al 100. Nos está permitido borrar dos números cualesquiera a y b y sustituirlos por $a + b - 1$. Si repetimos el proceso hasta que solo quede un número, ¿qué número quedará escrito en la pizarra?

Solución

Si sustituyéramos cada par de números elegidos por su suma, es evidente que la suma total de todos ellos no cambiaría. Ahora bien, si en cada paso restamos 1, en cada paso la suma de todos ellos disminuye en una unidad. Como hay que repetir el proceso 99 veces hasta que quede un solo número, el que quedará escrito en la pizarra es

$$(1 + 2 + \cdots + 100) - 99 = 5050 - 99 = 4951.$$

50. Se toman 5 puntos en los vértices de una cuadrícula. Prueba que siempre hay dos de ellos de manera que su punto medio es también en un vértice de la cuadrícula.

Solución

Tomando como origen uno cualquiera de los puntos de la cuadrícula, a cada vértice se le puede asignar una pareja de números enteros. Si atendemos a la paridad de las componentes de las parejas, solo hay cuatro posibles tipos de ellas

$$(P, P), \quad (P, I), \quad (I, P), \quad (I, I).$$

Como tenemos 5 puntos, por el principio del palomar, habrá dos que compartan el mismo tipo de paridad. Por tanto, su punto medio tendrá coordenadas enteras y será un punto de la cuadrícula.

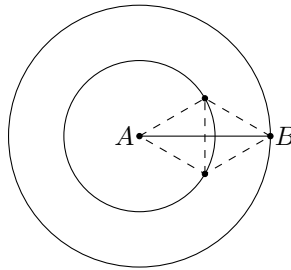
51. Los puntos del plano se colorean con dos colores. Prueba que podemos encontrar dos puntos del mismo color a distancia 1. Prueba que, si se usan tres colores, también existen dos puntos del mismo color a distancia 1.

Solución

Probemos la primera parte. En este caso es sencillo, basta tomar un triángulo equilátero de lado 1. Por el principio del palomar, dos de los tres vértices tienen que tener el mismo color, por lo que tenemos dos puntos a distancia 1.

No es el único argumento que vale. Podríamos haber tomado un punto arbitrario de uno de los colores y trazar una circunferencia de radio 1 a su alrededor. Si alguno de los puntos de la circunferencia es del mismo color que el centro, ya hemos acabado y, si no, todos los puntos de la circunferencia son del otro color, por lo que también habrá dos a distancia 1 del mismo color.

Este segundo argumento es el que usaremos para la segunda parte, cuando se usan tres colores, que llamaremos A , B y C . Elegimos un punto arbitrario, que supondremos del color A . Ahora trazamos una circunferencia de radio $\sqrt{3}$ (dos veces la altura de un triángulo equilátero de lado 1). Si todos los puntos de esa circunferencia son de color A , ya habremos encontrado dos de ellos a distancia 1 que son del mismo color (A en este caso). Si eso no sucede es por que hay al menos un punto de otro color que no sea A . Pongamos que hay un punto de color B . Ahora tomamos una circunferencia de radio 1, centrada en el primer punto y formamos la siguiente figura



Tenemos dos triángulos equiláteros de lado 1 con dos vértices sin colorear. Ahora bien, solo podemos usar el color C para no tener dos a distancia 1 del mismo color, lo que es imposible.

- 52.** Prueba que si se eligen $n + 1$ números distintos entre 1 y $2n$, siempre podemos encontrar dos que son primos entre sí.

Solución

Consideremos las siguientes n parejas de números:

$$(1, 2), (3, 4), (5, 6), \dots, (2n - 1, 2n).$$

Es evidente que los dos números de cada pareja son primos entre sí, al ser su diferencia 1. Por el principio del palomar, dos de los números elegidos pertenecen a una de estas parejas, por lo que son primos entre sí.

- 53.** Prueba que, dados 1011 enteros cualesquiera, siempre podemos encontrar dos de ellos de manera que o bien su suma o bien su diferencia es múltiplo de 2019.

Solución

Agrupamos los restos al dividir por 2019 por parejas, de manera que la suma de los elementos de una pareja sea 2019. Esto lo podremos hacer con todos los restos, salvo el 0, que quedará suelto. Así, tenemos 1009 parejas

$$(1, 2018), (2, 2017), (3, 2016), \dots, (1009, 1010),$$

más el 0. Estos son nuestros palomares. Como hemos elegido 1011 números, habrá dos de ellos que tengan sus restos en el mismo palomar. Si fuera el caso de que ambos restos son iguales, la diferencia entre los dos números será múltiplo de 2019. En caso contrario, sus restos suman 2019, por lo que su suma es múltiplo de 2019.

- 54.** Dados 1011 números enteros diferentes entre 1 y 2019, prueba que siempre hay tres de ellos tales que uno de ellos es la suma de los otros dos.

Solución

Sean $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{1011}$ los 1011 números elegidos, ordenados de menor a mayor. Ahora consideramos las diferencias de todos ellos con a_1 . Es decir, consideramos los 1010 números diferentes

$$b_2 = a_2 - a_1, \quad b_3 = a_3 - a_1, \quad \dots, \quad b_{1011} = a_{1011} - a_1,$$

que verifican $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < 2019$. Si alguno de los b_j coincide con alguno de los a_k (con $k > 1$), ya habríamos terminado, pues

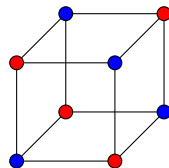
$$b_j = a_j - a_1 = a_k \Rightarrow a_j = a_1 + a_k.$$

La única forma de que esto no ocurra es que ninguno de los b_j coincida con uno de los a_k ($k > 1$). Esto es, los b_j tienen que ser uno de $2019 - 1011 = 1008$ números que no han sido elegidos más el a_1 . Como hay 1010 b_j , esto es imposible, por lo que tiene que existir un a_k de manera que $b_j = a_k$.

- 55.** Inicialmente, 7 de los vértices de un cubo están etiquetados con un 0 y el octavo con un 1. Podemos incrementar en una unidad la etiqueta de dos vértices unidos por una arista. ¿Es posible que, al cabo de una serie de incrementos, todas las etiquetas sean múltiplo de 5?

Solución

Si aumentamos en uno las etiquetas de los vértices de una arista, su diferencia no varía. Así, si pudiéramos colorear los vértices del cubo con dos colores, azul y rojo, de manera que sea cual sea la arista que elijamos uno de los vértices es rojo y el otro azul, la diferencia entra la suma de las etiquetas de ambos colores permanecería constante. Pero esta coloración se puede conseguir, como vemos en la siguiente figura.

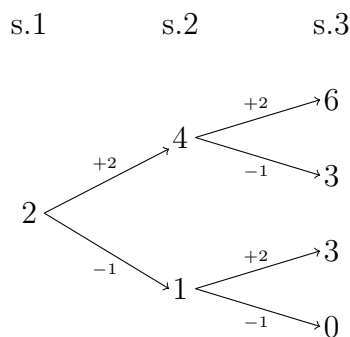


Por lo tanto, la diferencia entre la suma de las etiquetas de los vértices rojos y azules permanece constante y será igual a 1, por los datos iniciales del problema. Si al final todas las etiquetas fueran múltiplo de 5, su diferencia también debería serlo, pero 1 no es múltiplo de 5. Es decir, es imposible conseguir que las 8 etiquetas sean múltiplo de 5.

- 56.** Según una leyenda, inicialmente el universo estaba vacío y, cada segundo, o bien se crean dos estrellas o desaparece una. Después de 3^{2019} segundos, ¿puede el universo tener exactamente $3^{673} + 1$ estrellas?

Solución

Veamos qué es lo que pasa en los primeros segundos:



Fijámonos en lo anterior, podemos concluir que si N es el número de segundos transcurridos y S es el número de estrellas en el segundo N

$$N + S \equiv 0 \pmod{3}.$$

Después de 3^{2019} segundos, si el número de estrellas fuera $3^{673} + 1$, tendríamos que

$$3^{2019} + 3^{673} + 1 \equiv 1 \pmod{3},$$

pero eso no puede ser. Por lo tanto, no puede haber ese número de estrellas.

- 57.** En la pizarra están escritos los números del 1 al 2019. Por turno, se eligen dos de ellos, a y b , y se reemplazan por $ab + a + b$. Después de hacer esto 2018 veces, ¿se puede saber qué número quedará escrito en la pizarra?

Solución

La respuesta es sí. Para verlo, nos fijamos en la sustitución que se hace. Se cambian a y b por $ab + a + b$, lo que es igual a $(a + 1)(b + 1) - 1$. Esto nos da una pista para la construcción de un invariante. Así, si denotamos por $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ a los números escritos en la pizarra (nótese que no sería necesario que fueran los números del 1 al 2019), consideramos el producto

$$P = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_{2019} + 1).$$

Al elegir dos números a_j y a_k , los factores $(a_j + 1)$ y $(a_k + 1)$ quedarían sustituidos por el factor

$$(a_j a_k + a_j + a_k + 1) = (a_j + 1)(a_k + 1),$$

por lo que P permanece invariante. Ahora bien, también permanece invariante $P + C$, siendo C una constante cualquiera. Para llegar al invariante final, si solo tuviéramos 2 números en la pizarra, es claro que $C = -1$, por lo que el invariante buscado es $P - 1$ y el número final escrito será $2020! - 1$.

- 58.** Tenemos, inicialmente, la terna de números $(3, 4, 12)$. Ahora, podemos elegir dos números de la terna a , b y reemplazarlos por $0.6a - 0.8b$ y $0.8a + 0.6b$. Después de un número adecuado de pasos, ¿es posible llegar a alguna de estas dos situaciones?

1. La terna de números $(4, 6, 12)$.

2. Una terna (x, y, z) que verifique que $|x - 4| < 1/\sqrt{3}$, $|y - 6| < 1/\sqrt{3}$, $|z - 12| < 1/\sqrt{3}$.

Solución

Si nos damos cuenta de que $0.6^2 + 0.8^2 = 1$ no es difícil ver que, si la terna inicial es (a, b, c) , un invariante es

$$S = a^2 + b^2 + c^2.$$

En efecto, si hemos elegido a, b y los reemplazamos por $0.6a - 0.8b$ y $0.8a + 0.6b$, el nuevo valor de S será

$$S = (0.6a - 0.8b)^2 + (0.8a + 0.6b)^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Ahora ya podemos responder a las dos preguntas del problema. Inicialmente

$$S = 3^2 + 4^2 + 12^2 = 169,$$

pero para la terna final $(4, 6, 12)$ se tiene que $S = 4^2 + 6^2 + 12^2 = 196$, por lo que es imposible conseguir dicha terna.

Tampoco podemos conseguir la segunda terna. Como $S = 169 = 13^2$, cualquier terna (x, y, z) que consigamos se encontrará sobre una esfera de radio 13. Ahora bien, la terna $(4, 6, 12)$ se encuentra sobre una esfera de radio 14. Como la distancia mínima entre una esfera de radio 13 y otra de radio 14 es 1, no se puede conseguir lo que se pide en el apartado 2, ya que habríamos encontrado un punto sobre la esfera de radio 13 a distancia menor que 1 de la esfera de radio 14.