Seminario de problemas Curso 2024-25. Hoja 3

24. Cuatro niños se pesan en una báscula pero quieren ocultar su peso a los demás. Por ello, deciden pesarse de tres en tres de todas las formas posibles. Al hacerlo, obtienen los siguientes pesos: 63kg, 66kg, 69kg, 72kg. Más tarde se dan cuenta de que tienen demasiada información y pueden saber el peso de cada uno de ellos. ¿Sabrías decir cuánto pesa cada uno?

Solución.

Sean A, B, C y D los cuatro niños, con pesos p_A, p_B, p_C, p_D, respectivamente, de manera que:

$$\begin{aligned} p_A + p_B + p_C &= 63, \\ p_A + p_B + p_D &= 66, \\ p_A + p_C + p_D &= 69, \\ p_B + p_C + p_D &= 72. \end{aligned}$$

Sumando las cuatro ecuaciones, resulta

$$3(p_A + p_B + p_C + p_D) = 270 \Rightarrow p_A + p_B + p_C + p_D = 90.$$

Ahora es posible obtener los pesos de cada uno de ellos. Así,

$$p_D = (p_A + p_B + p_C + p_D) - (p_A + p_B + p_C) = 90 - 63 = 27$$

y, análogamente, $p_C = 24$, $p_B = 21$, $p_A = 18$.

25. Las taquillas de los alumnos de un instituto están numeradas de manera consecutiva empezando desde el 1. El número de cada taquilla se ha puesto usando pegatinas con los dígitos del 0 al 9, que cuestan 2 céntimos cada una de ellas. Si han hecho falta 139.78 euros para numerar todas las taquillas, ¿cuántas taquillas hay?

Solución.

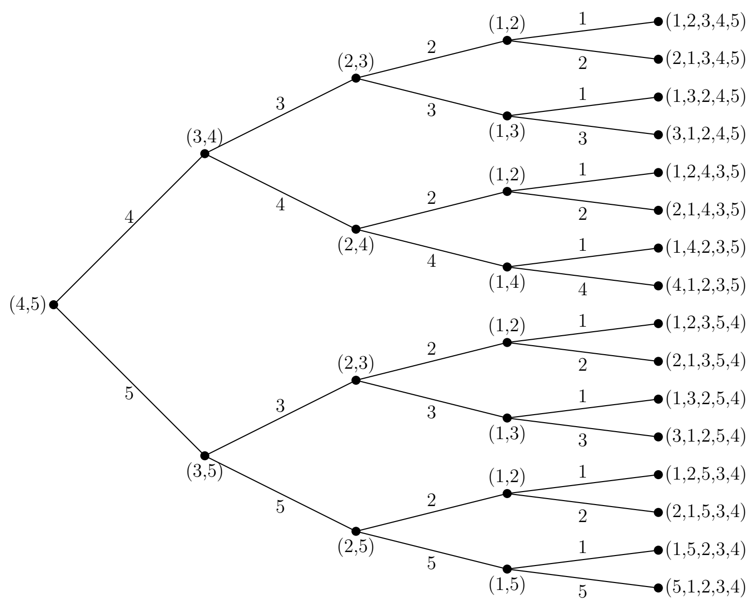
Como hemos gastado 139.78 euros y cada pegatina vale 2 céntimos, es decir 0.02 euros, hemos usado $139{,}78/0{,}02 = 6989$ pegatinas. Ahora bien, para numerar las taquillas del 1 al 9, hacen falta 9 pegatinas. Para numerar las taquillas de la 10 a la 99, hacen falta $90 \times 2 = 180$ pegatinas. Para numerar las que van del 100 al 999, se usan $900 \times 3 = 2700$ pegatinas. Así pues, hasta la taquilla 999 se han usado $9+180+2700 = 2889$ pegatinas. El resto de pegatinas, $6989 - 2889 = 4100$, se han usado para numerar las taquillas de la mil en adelante, que requieren 4 pegatinas cada una. Es decir, se han numerado $4100/4 = 1025$ taquillas más, empezando en la número 1000. Por tanto la última taquilla numerada es la 2024, que es el total de taquillas del instituto.

26. En la liga de fútbol del Instituto, los cinco primeros clasificados jugarán los playoff finales. Para decidir el ganador, el quinto clasificado juega contra el cuarto. El perdedor será el quinto clasificado y el ganador jugará contra el tercer clasificado de la liga. El perdedor de este partido será el cuarto, mientras que el ganador se enfrentará contra el segundo de la liga. El perdedor del partido será el tercer clasificado y el ganador jugará contra el primero de la liga, para decidir el campeón final. ¿De cuántas maneras diferentes puede acabar la clasificación final de los cinco primeros de la liga, tras jugarse los playoffs?

Solución.

Para decidir la clasificación final han de jugarse un total de cuatro partidos y cada uno de ellos puede arrojar dos resultados diferentes. Así, pues el total de resultados distintos será $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, que es el total de posibles clasificaciones finales.

Lo podemos ver en un diagrama de árbol, donde cada punto representa un partido y cada rama que sale de un punto representa al posible ganador del partido. Después del último partido, aparece la clasificación final.



27. Un número de teléfono de 7 dígitos de la forma $d_1d_2d_3$–$d_4d_5d_6d_7$ se dice que es *recordable* si el prefijo $d_1d_2d_3$ coincide o con $d_4d_5d_6$ o con $d_5d_6d_7$ o con los dos. Suponiendo que cada uno de los dígitos, d_j, puede ser uno de los números de 0 a 9, ¿cuántos números recordables posibles hay?

Solución.

Dado un número cualquiera $d_4d_5d_6d_7$, el prefijo se puede elegir de dos maneras diferentes, salvo en el caso de que todas ellas sean iguales, en que solo se puede hacer de una. Como hay 10^4 números diferentes de 4 dígitos, de los cuales 10 tienen todas las cifras iguales, el total de números recordables será igual a

$$2 \cdot (10000 - 10) + 10 = 19990.$$

28. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los números 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, de manera que cada una de las sumas de cuatro de ellos consecutivos sea múltiplo de 3? Por ejemplo, la ordenación 21, 31, 41, 81, 51, 61, 71 lo cumple, ya que son múltiplo de tres las sumas

$$21 + 31 + 41 + 81, \quad 31 + 41 + 81 + 51, \quad 41 + 81 + 51 + 61, \quad 81 + 51 + 61 + 71.$$

Solución.

Basta trabajar con los restos de los números al dividir por 3. De esta manera, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 es equivalente a 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0. Para que la suma de los 4 primeros números de la ordenación sea múltiplo de 3, necesariamente tiene que haber dos ceros, un 1 y un 2. Lo mismo sucede si sumamos los cuatro últimos, por lo que el número central debe de ser un 0. Por otra parte, una vez elegida la ordenación de 0, 1, 2 en las tres primeras posiciones, las tres últimas posiciones quedan completamente de terminadas por éstas.

Con esto, tenemos que las tres primeras posiciones son un 0 (3 opciones), un 1 (2 opciones) y un 2 (2 opciones), ordenadas de todas las formas posibles, lo que nos da $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3! = 72$ ordenaciones. Como la cifra central es un 0 y todavía nos quedan dos opciones para ella, el total de ordenaciones es 144.

29. Una araña tiene un clacetín y un zapato para cada una de sus 8 patas. ¿De cuantas formas distintas puede ponerse los calcetines y los zapatos, si el calcetín de una pata debe ponérselo antes que el zapato de esa misma pata?

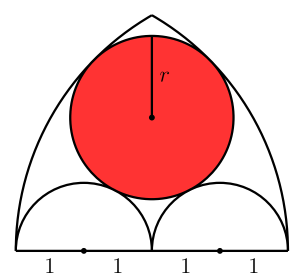
Solución.

Si no hubiera restricción para ponerse primero el calcetín antes que el zapato, habría que ordenar 16 elementos, entre calcetines y zapatos, lo que da un total de 16! ordenaciones. Sin embargo, hay que tener en cuenta que no puede ponerse el zapato de una pata, digamos la primera, antes que el zapato de esa misma pata. Es decir, hay que descontar aquellas ordenaciones que no nos valen. Pero observemos que, si tenemos una ordenación con el zapato de una de las patas, por ejemplo la primera, puesto antes que el calcetín de la misma pata, intercambiando las posiciones tenemos una ordenación con el orden correcto para el calcetín y el zapato de la primera pata. Es decir, en la mitad de las 16! ordenaciones está el calcetín de la primera pata antes que el zapato. Por tanto hay $16!/2$ ordenaciones en las que la araña se ponde bien el calcetín y el zapato de la primera pata. Razonando de igual manera con el resto de patas, habrá un total de

$$\frac{16!}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{16!}{2^8}$$

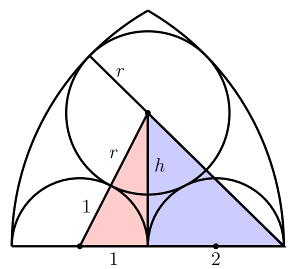
ordenaciones posibles. Como curiosidad, este es un número enorme igual a 81 729 648 000.

30. En el siguiente diseño de un arco gótico, ¿cuánto vale el radio del círculo superior coloreado de rojo?



Solución.

Usaremos la propiedad que dice que, si dos circunferencias son tangentes en un punto, entonces dicho punto y los centros de ambas circunferencias están alineados. Gracias a esto, formamos dos triángulos rectángulos, que son los que se ven en la siguiente figura.



Los triángulos comparten un lado, que llamamos h. En el triángulo rojo, los otros dos lados son 1 y $r+1$, mientras que en el azul son 2 y $4-r$. Aplicando el Teorema de Pitágoras en ambos triángulos, resulta

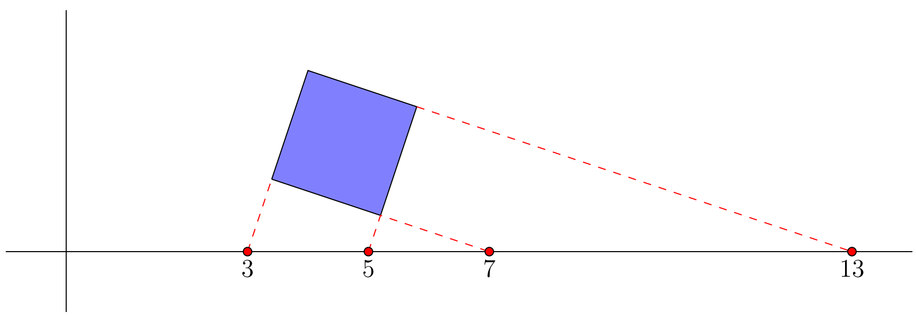
$$h^2 = (1+r)^2 - 1, \qquad h^2 = (4-r)^2 - 4.$$

Igualando ambas expresiones, podemos obtener el valor de r

$$(1+r)^2 - 1 = (4-r)^2 - 4 \Rightarrow 10r = 15 \Rightarrow r = \frac{6}{5}.$$

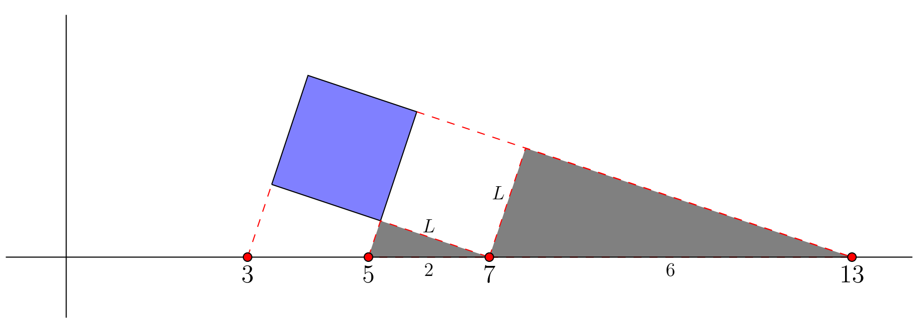
Por lo tanto, el área del círculo es igual a $\frac{36}{25}\pi$.

31. Calcula el área del cuadrado sombreado



Solución.

Podemos dibujar dos triángulos semejantes, como los de la siguiente figura, en los que dos de los lados son conocidos en ambos triángulos y relacionados con el lado del cuadrado L.



Está claro que los triángulos son rectángulos y que el mayor de ellos es tres veces el pequeño. Por lo tanto, el cateto mayor del triángulo grande tiene que ser tres veces el cateto mayor del triángulo pequeño, es decir, $3L$. Aplicando el Teorema de Pitágoras

$$6^2 = L^2 + (3L)^2 = 10L^2 \Rightarrow L^2 = \frac{36}{10} = \frac{18}{5},$$

y el área del cuadrado es igual a $18/5$.