Seminario de problemas Curso 2023-24. Hoja 3

Principio del palomar: Si distribuimos n palomas en m nidos, y $n > m$, entonces algún nido tiene más de una paloma.

Principio del palomar generalizado: Si distribuimos $km + n$ palomas en m nidos, y $n \geq 1$, entonces algún nido tiene al menos $k + 1$ palomas.

25. Prueba que, en un equipo de fútbol, hay dos jugadores que cumplen años el mismo día de la semana y que, cuando se enfrentan con un rival, entre los los dos equipos, son al menos 4 los jugadores que cumplen años el mismo día de la semana.

Solución.

En un equipo de fútbol hay 11 jugadores, mientras que solo hay 7 días en una semana. Por el principio del palomar, debe haber al menos dos que cumplan años el mismo día de la semana.

Cuando se enfrentan a otro equipo, el total de jugadores es 22, que es igual a $3 \cdot 7 + 1$ y, por el principio del palomar generalizado, hay 4 que cumplen años el mismo día de la semana.

26. En un cajón hay calcetines de color amarillo, azul y rojo. ¿Cuántos calcetines hay que sacar, como máximo, para asegurar que hay 4 del mismo color?

Solución.

En el peor de los casos, podemos sacar tres de color amarillo, tres de color azul y tres de color rojo, antes de sacar otro que haga que tengamos cuatro del mismo color. Por tanto, el máximo que podemos sacar es 10.

27. Si escribimos 1001 números al azar en una pizarra, prueba que hay dos cuyas tres últimas cifras coinciden.

Solución.

Hay 1000 terminaciones diferentes de tres cifras, desde 000 hasta 999. Como hay 1001 números en la pizaraa, por el principio del palomar, debe haber dos de ellos que tengan las tres últimas cifras iguales.

28. Elegimos 7 números distintos entre 1 y 11. Prueba que hay dos de ellos cuya suma es igual a 12.

Solución.

Dividimos el conjunto de números en los siguientes seis grupos:

$$(1, 11) \quad (2, 10) \quad (3, 9) \quad (4, 8) \quad (5, 7) \quad (6).$$

Si tenemos que elegir 7 números, y solo hay seis grupos, necesariamente elegiremos dos del mismo grupo, y su suma es 12.

29. Dados cualesquiera 7 números enteros, prueba que siempre hay tres de ellos que difieren uno de otro en un múltiplo de 3.

Solución.

Dividimos los números en tres clases, según el resto que dejan al dividir por 3. Esto es, los que dejan resto 0, los que dejan resto 1 y los que dejan resto 2. Al elegir 7 números, por el principio del palomar generalizado, tres de ellos dejarán el mismo resto al dividir por tres. Por tanto, sus diferencias son múltiplos de 3.

30. Prueba que existen dos potencias de 7 cuya diferencia es divisible por 2023.

Solución.

Consideremos las primeras 2024 potencias de 7. Esto es:

$$7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, \dots, 7^{2021}, 7^{2022}, 7^{2023}, 7^{2024}.$$

Como en el problema anterior, consideramos los restos de estas 2024 potencias al dividirlas por 2023. Como solo hay 2023 restos posibles y 2024 potencias, habrá dos de ellas que dejen el mismo resto, por lo que su diferencia es un múltiplo de 2023.

31. Prueba que, si elegimos 1013 números diferentes entre 1 y 2024, entonces hay dos que son consecutivos, dos cuyo máximo común divisor es igual a uno y dos de tal manera que uno divide al otro.

Solución.

Agrupemos los números del 1 al 2024 de dos en dos, como sigue:

$$(1, 2), (3, 4), (5, 6), \dots, (2023, 2024).$$

En total hay 1012 parejas. Al elegir 1013 números, habremos tenido que elegir necesariamente dos números de la misma pareja y, por tanto, consecutivos. Ahora bien, dos números consecutivos son primos entre sí, es decir, su máximo común divisor es igual a 1.

Para ver que hay uno que divide a otro, notemos que todo número k, entre 1 y 2024, se puede escribir como $m2^n$, donde m es un número impar menor que 2024 y $n \geq 0$. Por ejemplo:

$$7 = 7 \cdot 2^0, \quad 12 = 3 \cdot 2^2, \quad 2022 = 1011 \cdot 2^1, \quad 2023 = 2023 \cdot 2^0, \quad 2024 = 503 \cdot 2^3.$$

Como solo hay 1012 números impares entre 1 y 2024, necesariamente hemos elegido dos números que son de la forma $m2^k$, $m2^n$, con $n > k$, lo que significa que el primero divide al segundo.

32. Reordenamos los números $1, 2, 3, \dots, n$ y obtenemos la lista de números $a_1, a_2, \dots, a_n$. Si n es impar, prueba que el producto $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ es un número par, sin importar cuál sea la reordenación que hayamos hecho.

Solución.

La única forma de que el producto final sea un número impar es que todos los factores sean números impares, lo que implica que a_k debe ser par, si k es impar, y a_k debe ser impar, si k es par. Como n es impar, n es de la forma $n = 2m + 1$. Así, a los $m + 1$ números $1, 3, 5, \ldots, 2m+1$ les tendremos que asignar $m+1$ números pares, pero solo hay m números pares entre 1 y $2m + 1$. Aplicando el principio del palomar, necesariamente habrá una diferencia de dos números impares, que es un número par, y el producto final será, por tanto, un número par.

33. Tenemos 7 segmentos de longitudes entre 1 y 10 centímetros. Prueba que hay tres de ellos con los que se puede formar un triángulo.

Solución.

Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, deberá verificarse que

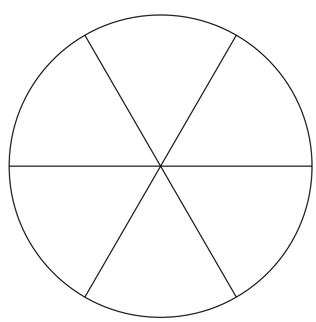
$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b.$$

Pensemos en escoger medidas que no permitan construir un triángulo. El caso límite es cuando la suma de dos de las longitudes es igual a la tercera (por ejemplo $a + b = c$). Con esta idea, el primer triángulo límite, con los segmentos más pequeños, lo podríamos obtener con longitudes 1, 1 y 2. Para no poder formar un triángulo con estas tres longitudes y otra más, la primera longitud que nos permite hacer esto es 3 ($1 + 2 = 3$). Si añadimos otra nueva longitud que no permita formar triángulo, la más pequeña que cumple esto es 5 ($2 + 3 = 5$). La siguiente longitud que podemos añadir es 8. Es decir con longitudes 1, 1, 2, 3, 5, 8 no hay ninguna combinación que permita hacer un triángulo. La siguiente longitud que no nos permitiría formar un triángulo es 13, pero es mayor que 10, por lo que podemos asegurar que, con 7 segmentos, entre 1 y 10 centímetros, siempre hay tres que forman un triángulo.

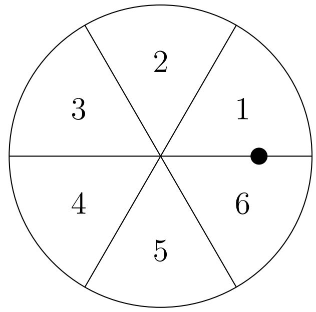
34. Prueba que, dados 6 puntos en el interior de un círculo de radio uno, siempre hay dos cuya distancia es menor que uno.

Solución.

Dividimos el círculo en seis sectores circulares iguales, como se ve en la figura.



Si tenemos dos puntos en un sector circular, como no pueden estar sobre la circunferencia, su distancia será menor que 1. Ahora bien, hay seis puntos y seis sectores y, entonces, no podemos asegurar que haya dos en el mismo sector. ¿Qué hacemos entonces? La idea es girar el círculo hasta que uno de los radios pase por uno de los puntos.

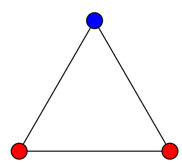


Si alguno de los puntos restantes está en uno de los sectores numerados con 1 o 6, entonces está a distancia menor que uno del punto que está sobre el radio. En caso contrario, los 5 puntos restantes estarán distribuidos en los cuatro sectores numerados del 2 al 5. Pero, por el principio del palomar, alguno de esos cuatro sectores contendrá dos puntos y su distancia será menor que uno.

35. Si coloreamos los puntos del plano de rojo o de azul, prueba que siempre podemos encontrar dos del mismo color separados una distancia de dos centímetros.

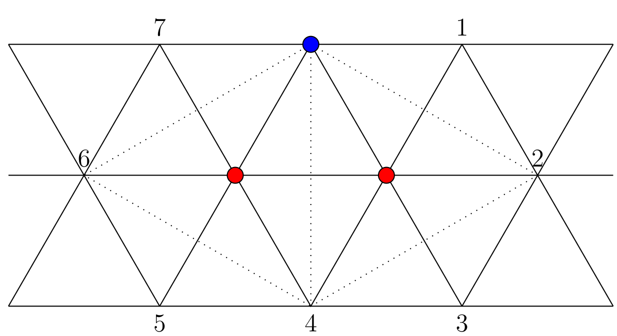
Solución.

Basta construir un triángulo equilátero de lado 2 centímetros. Si coloreamos los vértices del mismo con dos colores, por el principio del palomar, dos de ellos son del mismo color y están a distancia de dos centímetros.

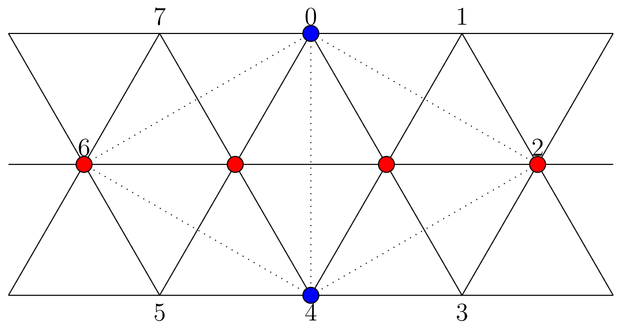


36. Si coloreamos los puntos del plano de rojo o de azul, prueba que siempre hay un triángulo equilátero con los vértices del mismo color.

Solución. Intentemos, partiendo de un triángulo equilátero, ir coloreando puntos de manera que no se forme ningún otro triángulo equilátero con vértices del mismmo color. Para ello, hacemos una retícula, donde hemos numerado alguno de los vértices de la misma.



Si queremos evitar triángulos con el mismo color, el vértice 4 tiene que ser de color azul. Eso hace que los vértices 2 y 6 tengan que ser rojos.



Ahora, si queremos evitar un triángulo con los tres vértices rojos, los vértices 1, 3, 5 y 7 deberían ser azules, pero, entonces, el triángulo equilátero de vértices 0, 3 y 5 tendría todos los vértices azules.