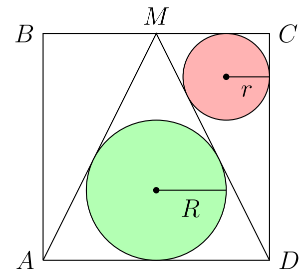
Seminario de problemas Curso 2022-23. Hoja 3



18. En un cuadrado $ABCD$, M es el punto medio del lado BC. ¿Cuál es el cociente entre los radios R y r de las circunferencias inscritas en los triángulos AMD y MCD?

Solución.

Como ya se vio en la Hoja 1, el área de un triángulo de lados a, b, c se puede escribir como

$$A = \frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r,$$

donde r es el radio de la circunferencia inscrita.

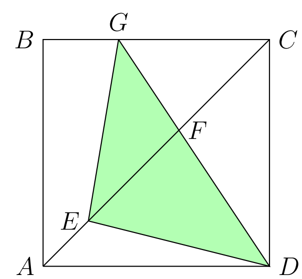
Sea $2L$ el lado del cuadrado. Por el Teorema de Pitágoras, $MD = MA = L\sqrt{5}$ y entonces, si R es el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo MAD y r el de la inscrita en el triángulo CMD, resulta:

$$2L^2 = (1+\sqrt{5})LR, \quad L^2 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})Lr.$$

De aquí se sigue que

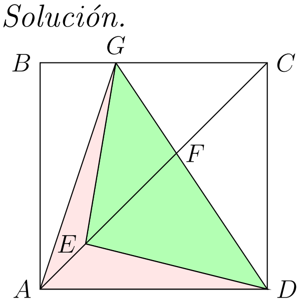
$$\frac{R}{r} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Este número se conoce como *número áureo* y se representa por la letra griega ϕ.



19. En un cuadrado $ABCD$, de área 36cm^2, se divide la diagonal AC en tres partes de forma que AE es la mitad de EF. Sea G el punto de intersección de la recta que une D y F con el lado BC. ¿Cuál es el área del triángulo DGE?

Solución.



Fijémonos en el área del triángulo AGD, que es exactamente la mitad del área del cuadrado, es decir, 18. Esta área se puede descomponer en la suma de las áreas de cuatro triángulos, AGE, EGF, AED y EFD. Ahora bien, los triángulos AEG y EGF comparten el vértice G y por tanto su altura h, ya que sus bases están en la misma línea. Eso quiere decir que

$$\text{Área}\, AGE = \frac{1}{2}AE\cdot h, \qquad \text{Área}\, EGF = \frac{1}{2}EF\cdot h = 2\cdot \text{Área}\, AGE,$$

puesto que $EF = 2\cdot AE$. Análogamente $\text{Área}\, EFD = 2\cdot\text{Área}\, AED$. Teniendo esto en cuenta, resulta que

$$\frac{3}{2}(\text{Área}\, EGF + \text{Área}\, EFD) = 18 \Rightarrow \text{Área}\, EGF + \text{Área}\, EFD = 12.$$

20. En la secuencia $1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, \ldots$ ¿qué número ocupa el lugar 2022?

Solución.

Los números que aparecen en esta secuencia son las potencias de 2 y aparecen un número de veces igual a la potencia que representan. Así, después del último 8, los siguientes 16 números serán igual a 16, los siguientes 32 serán igual a 32 y así sucesivamente. No es difícil ver que el primer 2 aparece en la posición 2, el primer 4 en la posición 4, etc. Teniendo en cuenta que $2^{10} = 1024$ y $2^{11} = 2048$, el número que ocupa la posición 2022 será el 1024 (el primer 1024 aparce en la posición 1024 y el último en la posición 2047).

21. Encuentra todas las soluciones de la ecuación $m+2mn+n = 22$, donde m y n son números naturales.

Solución.

Al ser m y n números naturales, tenemos que $m, n \geq 1$ y, de la propia ecuación, se ve que los posibles valores de m y n no pueden ser grandes. De hecho si uno de ellos es mayor o igual que 5 es evidente que la ecuación no puede tener soluciones enteras. Así pues, podemos proceder por un procedimiento exhaustivo, probando con los posibles valores de uno de los dos números, teniendo en cuenta que si la pareja (m, n) es solución, lo será también la pareja (n, m).

Si $m = 1$, entonces la ecuación se reduce a $3n = 21$ y $n = 7$.

Si $m = 2$, entonces resulta $5n = 20$ y $n = 4$.

Si $m = 3$, la ecuación queda como $7n = 19$, que no tiene solución entera.

Ya no sería necesario probar más, debido a la simetría. Por lo tanto, las soluciones son las parejas $(1, 7)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$ y $(7, 1)$.

El método anterior resultaría ineficaz si el segundo miembro de la ecuación fuera un número grande, por ejemplo 2022. Lo mejor es tratar de encontrar una forma factorizada de la ecuación. En este sentido, buscamos un producto de dos factores cuyo desarrollo nos dé la expresión del primer miembro o un múltiplo de la misma. En este caso, el término $2mn$ sugiere buscar factores de la forma $(2m + a)$ y $(2n + b)$. Tomando $a = b = 1$, resulta

$$(2m + 1)(2n + 1) = 2m + 4mn + 2n + 1 = 2(m + 2mn + n) + 1.$$

Tenieno esto en cuenta, podemos escribir

$$2(m + 2mn + n) + 1 = 2 \cdot 22 + 1 = 45 = (2m + 1)(2n + 1).$$

Ahora lo que buscamos son dos números naturales cuyo producto es 45. Observemos que cada uno de los factores es estrictamente mayor que 1, por lo que las únicas soluciones posibles son

$$(2m + 1)(2n + 1) = 3 \cdot 15,\ 5 \cdot 9,\ 9 \cdot 5,\ 15 \cdot 3,$$

que dan lugar a los pares de soluciones que hemos encontrado antes.

Para la ecuación $m + 2mn + n = 2022$, mediante la técnica de factorización, habríamos encontrado que

$$(2m + 1)(2n + 1) = 4045 = 5 \cdot 809,\ 809 \cdot 5,$$

con soluciones $(2, 404)$ y $(404, 2)$.

22. En un examen de matemáticas, 5 alumnos han obtenido las siguientes notas sobre 100: 71, 76, 80, 82 y 91. El profesor va introduciendo las notas al azar en una hoja de cálculo y se da cuenta de que, cada vez que introduce una, la nota media es siempre un número entero. ¿Cuál es la última nota que introdujo el profesor?

Solución.

Como la media, a medida que se introducen las notas, es un número entero, la suma de las tres primeras notas introducidas tiene que ser un múltiplo de 3. Fijémonos en los restos de las 5 notas cuando se dividen por 3:

$$71\,(\text{resto } 2), \quad 76\,(\text{resto } 1), \quad 80\,(\text{resto } 2), \quad 82\,(\text{resto } 1), \quad 91\,(\text{resto } 1).$$

La única forma de que la suma de tres notas sea múltiplo de tres es que la suma de los restos sea múltiplo de 3. Esto solo es posible si sumamos las tres notas que dejan resto 1, es decir 71, 76 y 91 (observemos que las dos primeras han tenido que ser 71 y 91, aunque no sepamos en qué orden).

Al introducir la siguiente nota, la suma resultante tiene que ser múltiplo de 4. Como la suma de las tres primeras notas es 238, que no es múltiplo de 4, la siguiente nota introducida necesariamente tiene que ser 82. Así pues, la última nota que introdujo el profesor fue 80.

23. Ana, Bea, Carla y Daniela se encuentran una bolsa llena de cromos. Ana cuenta los cromos de tres en tres y le sobran 2. Bea los cuenta de 5 en 5 y le sobran 3 y Carla los cuenta de 19 en 19 y le sobran 7. Daniela no quiere contarlos y trata de adivinar cuántos hay con la información que ya tiene. ¿Cuál es el menor número de cromos que podría contener la bolsa? ¿cuántos podría haber si hay al menos 500 cormos pero no más de 1500?

Solución.

Observemos que el número buscado es de la forma $N = 19 \cdot k + 7$. Por otra parte, al dejar resto 3 al dividir por 5, el número acaba en 3 o en 8. De aquí deducimos que $19 \cdot k$ acaba en 1 o en 6. El valor más pequeño de k que podemos considerar es, entonces, $k = 4$, que nos da $N = 83$. Como 83 deja resto 2 al dividir por 3, este es el menor número de cromos que podría haber en la bolsa.

Es posible obtener más soluciones añadiendo a la solución ya obtenida un múltiplo cualquiera del mínimo común múltiplo de 3, 5 y 19. Es decir, las soluciones son de la forma

$$N = 83 + 285j, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Como $500 \le 83 + 285j \le 1500$, resulta $2 \le j \le 4$ y obtenemos las posibles soluciones 653, 938, 1223.

24. ¿Para cuántos números n el resto de dividir 2022 entre n es 1 o 2?

Solución.

Los números n para los que el resto de dividir 2022 por n es 1 son aquellos que son divisores de 2021 y que no lo son de 2022. Ahora bien, $2021 = 43 \cdot 47$, que tiene exactamente 4 divisores, enter ellos el 1, que debemos descartar al ser divisor de 2022. Es decir hay 3 números para los que el resto de dividir 2022 por n es 1.

De manera análoga, los números n para los que el resto de dividir 2022 por n es 2 son aquellos que son divisores de 2020 y que no lo son de 2022. Podemos ver que $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, que tiene 12 divisores, entre ellos el 1 y el 2, que son divisores de 2022. Por tanto hay 10 números para los que el resto de dividir 2022 por n es 2.

Teniendo en cuenta lo anterior, hay 13 números n de manera que el resto de dividir 2022 entre n es 1 o 2. Estos números pueden obtenerse de la lista de divisores de 2020 y 2021 y son

$$4, 5, 10, 20, 43, 47, 101, 202, 404, 505, 1010, 2020, 2021.$$

25. Los dígitos, 1, 4, 9, 2 se usan una vez cada uno para formar un número N de 4 cifras (por ejemplo 1492). ¿Cuál es la suma de todos los posibles N?

Solución.

Podría parecer que para resolver el problema necesitamos escribir todos los números que se pueden formar usando una sola vez las cifras que nos dan. Sin embargo, podemos obtener esta suma sin necesidad de escribirlos todos. Para ver cómo, fijémonos en una cifra cualquiera cuando ocupa una posición determinada. Por ejemplo el 9 cuando está en la última posición. ¿Cuántos números hay que acaben en 9? Pues tantos como posibles ordenaciones de los otros tres números en las otras tres posiciones. Esto nos da seis números.

Argumentando de manera similar, habrá 6 números que acaben en 4, otros 6 que acaben en 2 y otros 6 que acaben en 1. Lo mismo podemos decir del resto de posiciones del número. Habrá 6 números cuya penúltima cifra sea un 9, etc. Así, al sumar todos los números, estaremos sumando 1, 2, 4, 9 seis veces en cada una de las posiciones (unidades, decenas, centenas y millares). Por tanto, la suma será:

$$6 \cdot (1 + 2 + 4 + 9) \cdot (1 + 10 + 100 + 1000) = 6 \cdot 16 \cdot 1111 = 106656.$$