Seminario de problemas Curso 2021-22. Hoja 3

22. Si $1/13 = 0.a_1a_2 \dots a_n \dots$, ¿cuánto vale la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2021}$?

Solución. Haciendo la división, resulta el número decimal

$$\frac{1}{13} = 0{,}076923\,076923\,076923 \cdots .$$

Así, el bloque de 6 cifras 076923 se repite de manera indefinida. Como $2021/6 = 336 \times 6 + 5$, la suma pedida es

$$336 \times (0 + 7 + 6 + 9 + 2 + 3) + 0 + 7 + 6 + 9 + 2 = 336 \times 27 + 24 = 9096.$$

23. Encuentra todos los números enteros x, entre 10 y 99, ambos incluidos, tales que el resto de dividir x^3 entre 100 es igual al cubo de la cifra de las unidades.

Solución. Un número de dos cifras, ab, se escribe como $10a + b$, por lo que

$$(10a + b)^3 = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3.$$

El resto al dividir por 100 será b^3 si ab^2 es múltiplo de 10 y $b^3 < 100$. Es decir $b < 5$. Ahora bien, ab^2 es múltiplo de 10 en los siguientes casos:

- $b = 0$, por lo que tendremos los números 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70.
- $a = 5$ y b par menor que 5 y tenemos los números 52 y 54.

24. Un número M tiene la propiedad de que si x e y son números positivos que cumplen $2x + 3y \leq M$, entonces también $x \cdot y \leq M$. Encuentra el mayor valor posible de M.

Solución.

Como $2x + 3y \leq M$, deducimos que

$$x \leq \frac{M - 3y}{2}.$$

Por tanto,

$$xy \leq \frac{M-3y}{2} y = \frac{3}{2}\left(\frac{M}{3} - y^2\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{M^2}{36} - \frac{M^2}{36} + \frac{M}{3} - y^2\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{M^2}{36} - \left[y - \frac{M}{6}\right]^2\right).$$

El valor máximo de esta expresión es igual a $M^2/24$. Igualando al valor máximo del producto, que es M, resulta $M = 24$.

25. ¿Existe algún número natural n para el que se verifique $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2020} = \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$?

Solución.

Vemos qué pasa si elevamos al cuadrado un número de la forma $\sqrt{n} + \sqrt{n-1}$:

$$\begin{aligned}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2 &= n + n - 1 + 2\sqrt{n(n-1)} = 2n - 1 + \sqrt{4n^2 - 4} \\ &= \sqrt{(2n-1)^2} + \sqrt{(2n-1)^2 - 1}.\end{aligned}$$

Como vemos es de la misma forma. Por tanto, como el exponente es un número par, sí que es posible encontrar tal número.

Como curiosidad, dejamos aquí el valor de n

$$
\begin{aligned}
n = \;& 3094546084348681465631345026303087937266586636420743142109863781997190 \\
& 4280242988531094532304486598060729655032911436148526590810883902114664 \\
& 1889864967612298249970582386444239153683554094072111942166551779368523 \\
& 5557189844143790302470541689448547841001758601338115848931265298447585 \\
& 7118645946090591706620773196290156740505766892717699341329886098839724 \\
& 3534865094934834970649526851386410413589303494865425246979485908060653 \\
& 4553746930837191339668098235261098351425578836196981826081682011714553 \\
& 9432749829384430918669008829899770329413516285253817306802273209865525 \\
& 6642759766442476528740047901509416961102107656412174784199643405466391 \\
& 5995172812739520981122352809127614000882873663849401329564178084747664 \\
& 9068834237111240006724300242608794807691116697410471749395333158831780 \\
& 5546875222395359742682940354102937696228808658824464916002987260614394 \\
& 5441104923538226221436660844190815318292275033731327277969561147437886 \\
& 8024176833623176009334667458610810537627282917097139695965798436912671 \\
& 3099877610349254306776147373025784805330080648265457509816789137617540 \\
& 9396659151331547459844107653456212836267912269955487616001070331055878 \\
& 9906506291465983847415443648887225934032221420102232503992019472842440 \\
& 6304110456414998303942511436134100335922234382993051253712831672185121 \\
& 0652445696656073320946705483890308874907466924378436096525422801352232 \\
& 6127067749500861703122896979971743131101164647222610247924246624986582 \\
& 1136471675497006969561960029529191902168177777864978772674873610129001 \\
& 6819699772150530567927302667269712545681039372698075410495202498706228 \\
& 4620199224609615750415940757257691851340034247927665008606893284567802 \\
& 1184230685692480370628912800070278080301386377006518531997916026435831 \\
& 5125139164960964018488654635458512191932468610898249225831676781997751 \\
& 5221459844960720862359067949467955573819621147337859898071739665707229 \\
& 4200716961340860688426193013792577896074535197479509406867496236946383 \\
& 9322227852579105413022337081821854417325805161968276986601048780475733 \\
& 380521482233674601053097691291383447230325604060001.
\end{aligned}
$$

26. Encuentra todos los pares (x, y) de números enteros (pueden ser negativos) tales que $x^2 + y^2 = 35(x + y)$.

Solución.

Lo primero es darse cuenta que $x^2 + y^2$ tiene que ser múltiplo de 7 y, entonces, tanto x como y lo son. Esto se puede ver usando los restos al dividir por 7.

Por otra parte, podemos reescribir la igualdad como

$$x^2 + y^2 - 35x - 35y = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{35}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{35}{2}\right)^2 = \frac{35^2}{2}.$$

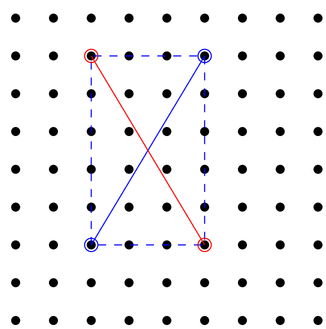
De aquí se deduce que x, y solo pueden tomar valores entre -7 y 42. Teniendo en cuenta estas dos restricciones, solo tenemos que probar algunas parejas (no todas), obteniéndose las siguientes soluciones

$$(-7,14),\quad (-7,21),\quad (0,0),\quad (0,35),\quad (14,-7),\quad (14,42),$$
$$(21,-7),\quad (21,42),\quad (35,0),\quad (35,35),\quad (42,14),\quad (42,21).$$

27. En un tablero de ajedrez 8×8, ¿cuántos rectángulos (y cuadrados) distintos se pueden formar juntando un número entero de casillas? Por ejemplo, en un tablero 2×2, hay cuatro rectángulos 1×1, otros cuatro 2×1 y uno 2×2. En total 9 posibles rectángulos diferentes.

Solución.

Pensemos no en los cuadrados, sino en los puntos de una retícula que definen el tablero, como en la figura



Un rectángulo estará definido solo por dos de estos puntos, que representan una de sus diagonales. Por tanto, basta elegir 2 puntos de entre los 81 que hay. Ahora bien, habrá que quitar todos aquellos casos en los que los dos puntos elegidos estén en la misma fila o en la misma columna. Esto nos da un total de

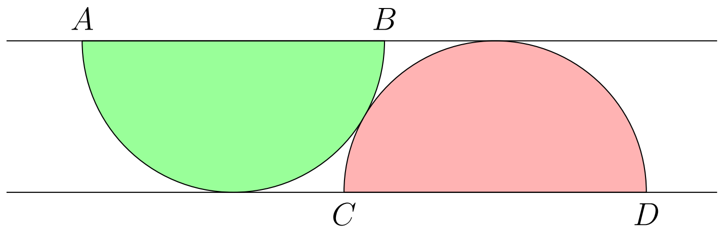
$$\binom{81}{2} - 18\cdot\binom{9}{2} = 2592.$$

Pero esta no es la solución, ya que un rectángulo tiene dos diagonales, por lo que estará contado dos veces. Así pues, la respuesta correcta es $2592/2 = 1296 = 36^2$.

El que sea un cuadrado perfecto no es casualidad. De hecho, podríamos haber caracterizado el rectángulo de otra manera. Así, el rectángulo queda caracterizado si decimos las dos filas en las que descansan los dos lados horizontales y las dos columnas en las que se encuentran los dos lados verticales. Ahora bien, los lados horizontales pueden estar en 2 de entre 9 filas, y lo mismo sucede con las columnas. Por tanto, el número total de rectángulos es igual a

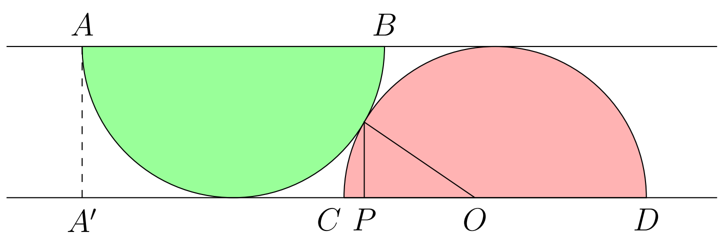
$$\binom{9}{2}\cdot\binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2}\cdot\frac{9\cdot 8}{2} = 36^2.$$

28. Los semicírculos de la figura son iguales y tangentes, de manera que las prolongaciones de los diámetros también son tangentes a los semicírculos. Si $AB = CD = 2$, encuentra el valor de AD y exprésa en la forma $\sqrt{x} + \sqrt{y}$.



Solución.

Si nos fijamos en el dibujo, debido a la simetría, el punto de tangencia de las dos circunferencias estará a la misma distancia de las rectas AB y CD, es decir a una distancia equivalente a la mitad del radio. Ahora trazamos el radio desde el centro de una de las circunferencias al punto de tangencia



Del triángulo rectángulo que se forma, podemos deducir, aplicando el Teorema de Pitágoras, que $OP = \sqrt{3}/2$. Por tanto $A'D = 2 + \sqrt{3}$ y, entonces,

$$AD^2 = (2 + \sqrt{3})^2 + 1 = 8 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2.$$

Por tanto $AD = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.