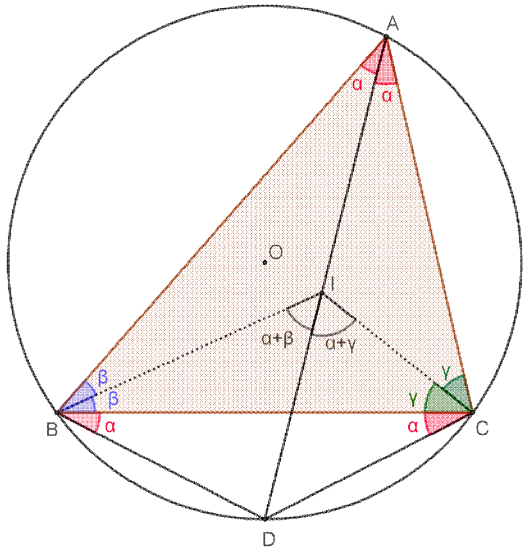
Seminario de problemas. Curso 2018-19. Soluciones hoja 3: Geometría 1

---

33. En un triángulo *ABC* trazamos la bisectriz interior del ángulo $\widehat{A}$ que vuelve a cortar a la circunferencia circunscrita a *ABC* en el punto *D*. Demuestra que *D* es centro de una circunferencia que pasa por *B*, *C* y el incentro *I* del triángulo *ABC*.

<u>Solución</u>

Por comodidad llamemos $\widehat{A}=2\alpha,\ \widehat{B}=2\beta,\ \widehat{C}=2\gamma$



.

Por ser inscritos con el mismo arco $\widehat{DC}$ tenemos que $\widehat{CAD}=\widehat{CBD}=\alpha$

Por ser inscritos con el mismo arco $\widehat{BD}$ tenemos que $\widehat{BAD}=\widehat{BCD}=\alpha$

Como consecuencia, el triángulo *BCD* es isósceles y cumple $BD=DC$

Por otra parte $\widehat{IBD}=\widehat{IBC}+\widehat{CBD}=\beta+\alpha$ y también $\widehat{BID}=\alpha+\beta$ pues es el ángulo exterior de vértice *I* en el triángulo *AIB*.

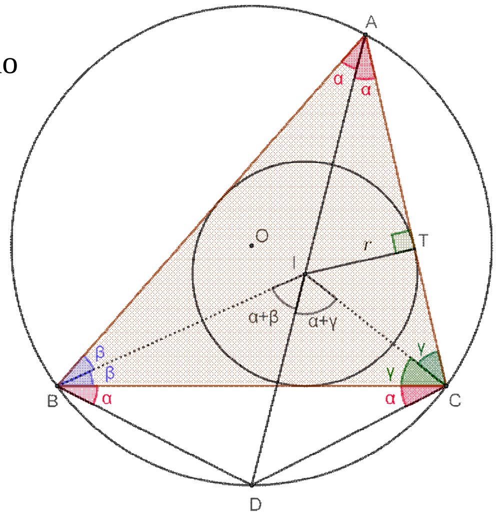
En consecuencia, el triángulo *BID* es isósceles y cumple $DI=DB=DC$

Luego *B*, *C* e *I* equidistan de *D*, es decir *D* es centro de una circunferencia que pasa por *B*, *C* e *I*.

<u>Propuesta 1</u>

A partir del problema anterior, demuestra el teorema de Euler: $R^2-OI^2=2Rr$ donde *R* y *r* son los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita al triángulo *ABC* respectivamente. Pista: el primer miembro es la potencia de *I* respecto a la circunferencia circunscrita (su centro es *O*).

Solución



Sea T el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el lado AC del triángulo,

$R^2 - OI^2$ es la potencia de I respecto a la circunferencia circunscrita, que también es igual a $ID \cdot IA$

Pero $ID=BD$ (problema anterior).

Por tanto: $R^2 - OI^2 = BD \cdot IA$

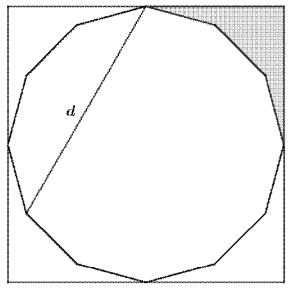
En el triángulo AIT : $AI = \dfrac{r}{sen\alpha}$

En el triángulo ABD: $\dfrac{BD}{sen\alpha} = 2R$ (Tª de los senos)

En consecuencia: $R^2 - OI^2 = 2rR$ $\quad$ $c.q.d.$

De este teorema se desprende la **desigualdad de Euler**: *En todo triángulo ABC se cumple la desigualdad* $R \geq 2r$ *entre los radios de las circunferencias inscrita (r) y circunscrita (R)*

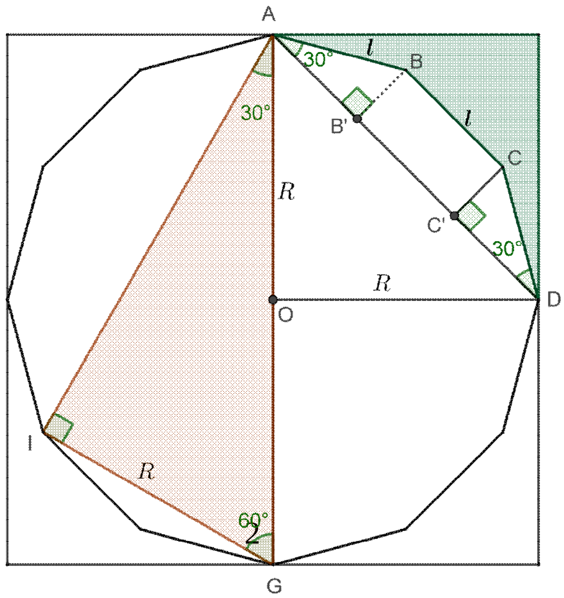
34. Cuatro vértices de un dodecágono regular están en los puntos medios de los lados de un cuadrado. Probar que:
a) El área de la parte sombreada es 1/12 del área del dodecágono regular.
b) El área del dodecágono es igual a la de un cuadrado de lado *d*.



Solución

Sea O el centro del dodecágono, R el radio de su circunferencia circunscrita y l su lado

a) Sin trigonometría:
Proyectamos ortogonalmente los vértices B y C sobre la diagonal AD y obtenemos los puntos B' y C'. Cada arco de cuerda l se ve desde O bajo ángulo de 30º, por lo que desde un punto de la circunferencia circunscrita se verá bajo un ángulo de 15º. Los triángulos rectángulos ABB' y ACC' cumplen que $\widehat{BAB'} = \widehat{CDD'} = 30°$, por lo que: $AB' = DC' = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$ $\quad y \quad$ $BB' = CC' = \dfrac{l}{2}$



La diagonal AD es $AD = R\sqrt{2} = l + l\sqrt{3} \Rightarrow l = \dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$

El área de $ABCD$ es: $S_T = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{l^2}{2} = \dfrac{l^2\left(\sqrt{3}+2\right)}{4} = \dfrac{2R^2\left(\sqrt{3}+2\right)}{4\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \dfrac{R^2}{4}$

El área de la parte sombreada es, por tanto, $S = \dfrac{R^2}{2} - \dfrac{R^2}{4} = \dfrac{R^2}{4}$

El área del dodecágono es: $S_D = 4\left(\dfrac{R^2}{2} + \dfrac{R^2}{4}\right) = 3R^2$

Por lo que $\dfrac{S}{S_D} = \dfrac{R^2/4}{3R^2} = \dfrac{1}{12}$ *c.q.d.*

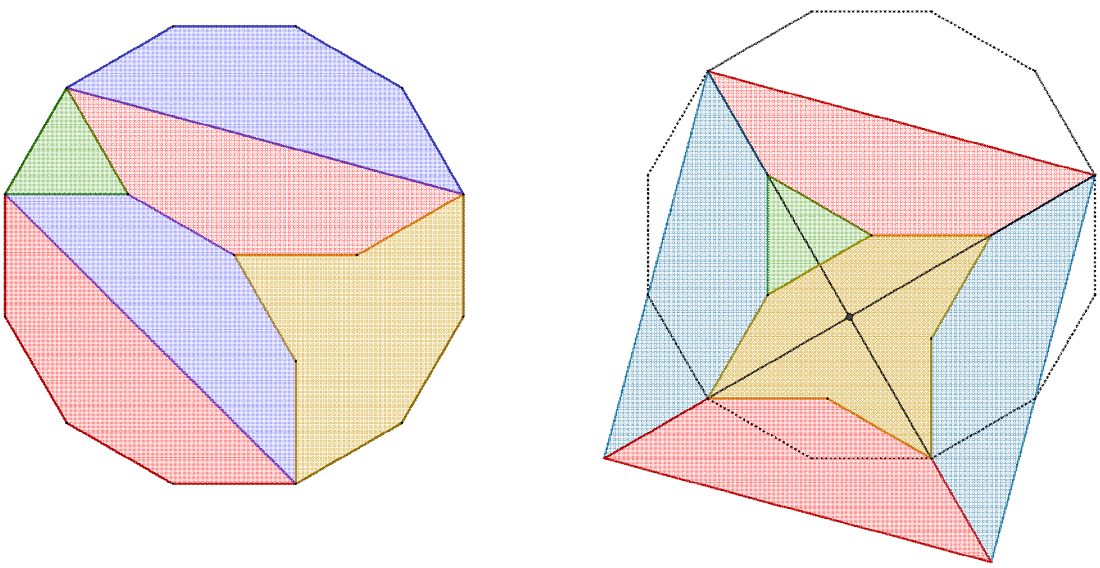
a') Con trigonometría

$S_D = 12[OAB] = 12\cdot\dfrac{1}{2}R^2 sen 30^{o} = 3R^2$; $S = R^2 - \dfrac{1}{4}S_D = R^2 - \dfrac{3}{4}R^2 = \dfrac{1}{4}R^2$ etc.

b) Basta con observar que el triángulo *AIG* es 30º-60º-90º con *IG=R* y *AG=2R*

$$AI = d = R\sqrt{3} \Rightarrow d^2 = 3R^2 = S_D$$

De este último apartado puede extraerse un sencillo rompecabezas geométrico.
Se trata de componer el cuadrado y el dodecágono con las seis piezas coloreadas de la figura:

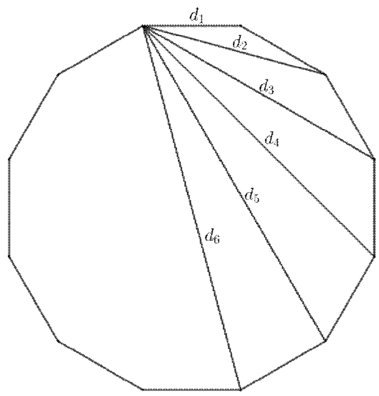


Propuesta 2:

Demuestra que la suma de los cuadrados de todos los lados y todas las diagonales de un dodecágono regular inscrito en una circunferencia de radio R es $144\,R^2$

Solución sencilla

Hacemos un pequeño catálogo de los segmentos que unen dos vértices del dodecágono según la "distancia en arcos" que cubren como cuerdas de la circunferencia circunscrita:



Hay:
12 de tipo d_1 (los lados), 12 de tipo d_2, 12 de tipo d_3, 12 de tipo d_4,
12 de tipo d_5 y 6 de tipo d_6 (diámetros).

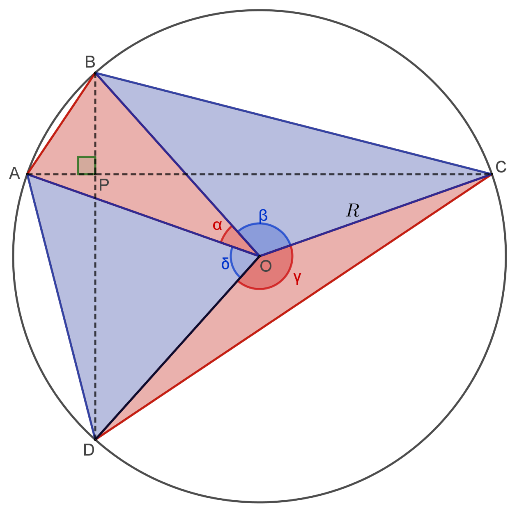
Notemos que, asociados convenientemente formamos triángulos rectángulos de hipotenusa $2R$. Por el teorema de Pitágoras:
$d_1^2 + d_5^2 = d_2^2 + d_4^2 = d_3^2 + d_3^2 = d_6^2 = 4R^2$

La suma buscada será, por tanto:

$$S = 12\left(d_1^2 + d_5^2\right) + 12\left(d_2^2 + d_4^2\right) + 6\left(d_3^2 + d_3^2\right) + 6d_6^2 = 48R^2 + 48R^2 + 24R^2 + 24R^2 = 144R^2 \quad c.q.d.$$

35. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con diagonales AC y BD perpendiculares e inscrito en una circunferencia de centro O. Prueba que los cuadriláteros $AOCD$ y $AOCB$ tienen la misma área.

Solución



Sea P el punto de intersección de las diagonales, y
Sean $\alpha = \widehat{AOB},\ \beta = \widehat{BOC},\ \gamma = \widehat{COD},\ \delta = \widehat{COA}$

Basta con probar que tienen igual área los triángulos AOB y COD, así como los triángulos AOD y BOC.

Siendo R el radio de la circunferencia circunscrita sabemos que:

$$[AOB] = \frac{1}{2}R^2 sen\alpha \quad y \quad [COD] = \frac{1}{2}R^2 sen\gamma$$

Pero por el teorema del ángulo interior aplicado a $\widehat{APB} = 90^\circ$ se tiene que:

$90^\circ = \dfrac{\alpha + \gamma}{2} \Rightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ \Rightarrow sen\alpha = sen\gamma$, con lo que $[AOB] = [COD]$

Análogamente $[BOC] = [DOA]$ con lo que queda demostrada la igualdad de áreas de ambos cuadriláteros.

Los alumnos de ESO, que aún no conocen la trigonometría, pueden justificar la igualdad de áreas de los triángulos AOB y COD (en rojo) simplemente adosándolos: se encontrarán con dos triángulos de igual base (R) que comparten una misma altura. Del mismo modo, adosando los triángulos azules se ve claro que los triángulos BOC y DOA tienen igual área.

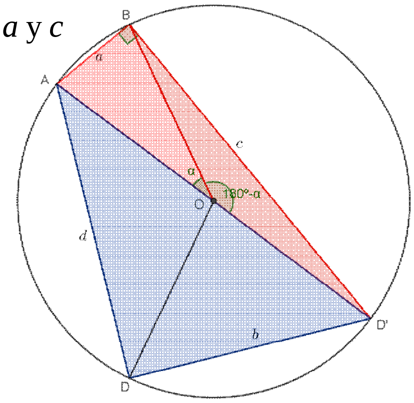
Propuesta 3

Demuestra que el área de un cuadrilátero cíclico de diagonales perpendiculares es

$$\frac{1}{2}\left(AB\cdot CD+BC\cdot AD\right)$$

Solución 1 (Partimos del problema 35)

Llamamos $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ y $\widehat{AOB}=\alpha$



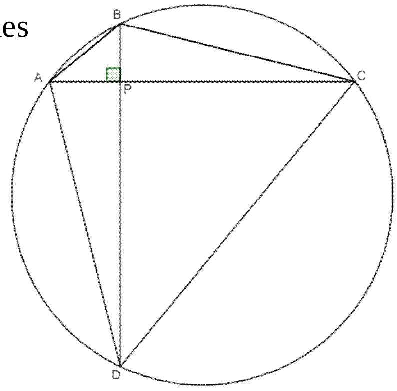
Al adosar las dos piezas rojas obtenemos un triángulo rectángulo de catetos ***a*** y ***c*** e hipotenusa *2R*. Su área es $S_1=\dfrac{a\cdot c}{2}$ y es la suma de las áreas de los triángulos *AOB* y *COD*

Repitiendo el proceso con los triángulos *BOC* y *DOA* (las dos piezas azules), obtenemos otro triángulo rectángulo de catetos ***b*** y ***d*** e hipotenusa *2R*. Su área es: $S_2=\dfrac{b\cdot d}{2}$

El área del cuadrilátero *ABCD* es, por tanto:

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{2}\left(a\cdot c+b\cdot d\right)\qquad \text{c.q.d.}$$

Solución 2 (con el teorema de Ptolomeo)



Veamos que el área del cuadrilátero es igual al semiproducto de sus diagonales al ser éstas perpendiculares entre sí:

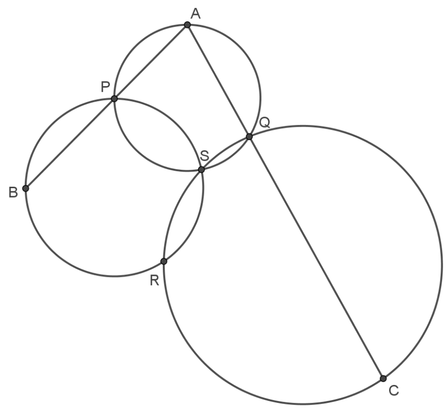
$$S=[ABCD]=[ABC]+[ACD]=\frac{AC\cdot BP}{2}+\frac{AC\cdot PD}{2}=\frac{AC\cdot BD}{2}$$

Por el **teorema de Ptolomeo** sabemos que en *un cuadrilátero cíclico ABCD el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos*, es decir:

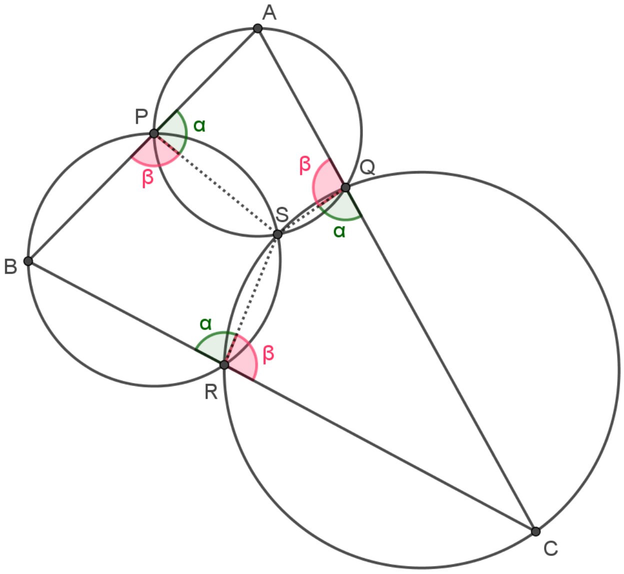
$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot DA$$

Con lo que queda demostrada la propuesta.

36. Prueba que los puntos *B*, *R* y *C* de la figura están alineados.



<u>Solución</u>



Sea $\widehat{APS} = \alpha$ y sea $\beta = 180º - \alpha$

Los puntos *A*, *P* y *B* están alineados, por lo que
$\widehat{SPB} = 180º - \alpha = \beta$

El cuadrilátero *BRSP* es cíclico, por lo que
$\widehat{BRS} + \widehat{SPB} = 180º \Rightarrow \widehat{BRS} = 180º - \beta = \alpha$

También es cíclico *APSQ*, luego
$\widehat{SQA} = 180º - \widehat{APS} = 180º - \alpha = \beta$

Por estar *A*, *Q* y C alineados: $\widehat{SQC} = 180º - \widehat{SQA} = \alpha$

Por ser *RSQC* cíclico $\widehat{SRC} = 180º - \widehat{SQC} = 180º - \alpha = \beta \Rightarrow \widehat{SRB} + \widehat{SRC} = \alpha + \beta = 180º$, es decir, los puntos *B*, *R* y *C* están alineados.

37. Una circunferencia de radio *r* está inscrita en un triángulo. Se trazan tangentes a dicha circunferencia paralelas a los lados del triángulo que recortan del triángulo original tres pequeños triángulos cuyas circunferencias inscritas tienen de radios r_1, r_2, r_3. Demuestra que $r_1 + r_2 + r_3 = r$

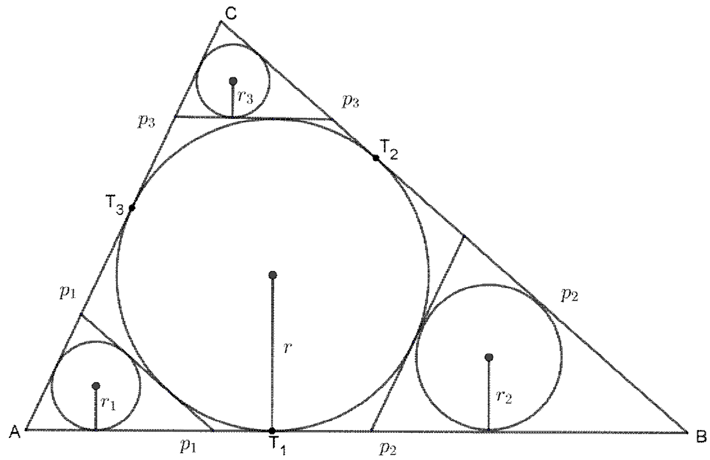
<u>Solución</u>

Los tres triángulos pequeños y el original son todos semejantes entre sí, por lo que podemos asegurar la proporcionalidad de dos longitudes homólogas de cada uno de ellos, como por ejemplo los respectivos semiperímetros y los respectivos radios de sus circunferencias inscritas:

$$\frac{r}{p} = \frac{r_1}{p_1} = \frac{r_2}{p_2} = \frac{r_3}{p_3} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

Para cada uno de los triángulos pequeños la circunferencia grande es una circunferencia exinscrita. De este detalle sabemos que:

$AT_1 = AT_3 = p_1$
$BT_1 = BT_2 = p_2$
$CT_2 = CT_3 = p_3$



Con lo cual
$p_1 + p_2 = c$; $p_2 + p_3 = a$; $p_3 + p_1 = b$

Sumando las tres igualdades, obtenemos:

$$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{a+b+c}{2} = p$$

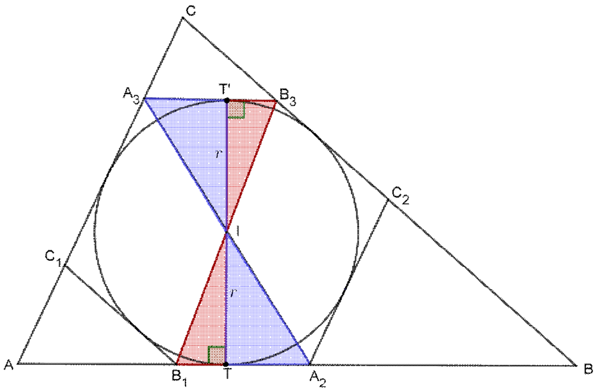
Volviendo a la proporción inicial:

$$\frac{r}{p} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{p} \Rightarrow r = r_1 + r_2 + r_3 \quad c.q.d.$$

Propuesta 4

Demuestra que, en el hexágono resultante de suprimir los triángulos pequeños en el problema anterior, dos lados paralelos tienen la misma longitud.

Solución



Trazamos por I la perpendicular común a AB y A_3B_3 a los que corta en T y T' respectivamente (ver figura).

Son claras las congruencias:

$$\triangle ITB_1 \equiv \triangle IT'B_3 \quad y \quad \triangle ITA_2 \equiv \triangle IT'A_3$$

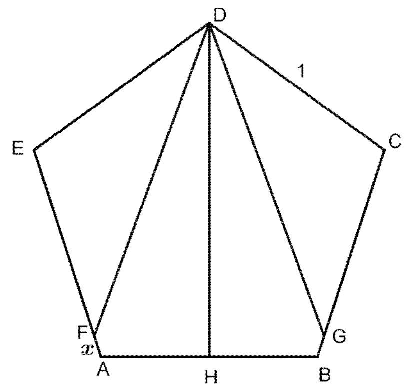
(triángulos rectángulos de ángulos iguales y con dos catetos homólogos iguales a r.

Por consiguiente:

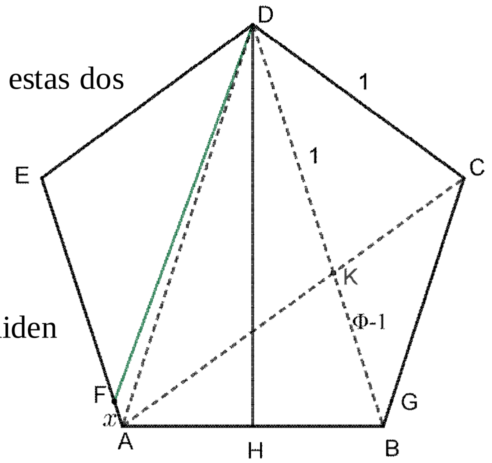
$$A_3B_3 = A_3T' + T'B_2 = TA_2 + B_1T = B_1A_2$$

Con los otros pares de lados procederemos de forma análoga.

38. Un pentágono regular de lado 1 dm ha sido dividido, como quiere indicar la figura, en cuatro partes de igual área. Halla la medida x del segmento AF.



Solución



La figura es necesariamente simétrica respecto al eje *DH*.

Trazamos las diagonales *AD*, *AC* y *BD*. Sea *K* el punto de corte de estas dos últimas diagonales.

Por comodidad denotaremos por A_1, A_2, A_3 las áreas siguientes:
$A_1 = [ADB]$, $A_2 = [ADE] = [ADK]$, $A_3 = [ADF]$

Sabemos que si el lado del pentágono es 1, sus diagonales miden $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número áureo). Ver "Recursos elementales…."

Los triángulos *ADB* y *ADK* comparten altura desde *A*, por lo que sus áreas son directamente proporcionales a sus bases:

$$\frac{A_1}{\Phi} = \frac{A_2}{1} \Rightarrow A_1 = \Phi \cdot A_2$$

Los triángulos *ADE* y *ADF* comparten altura desde *D*, por la misma razón:

$$\frac{A_2}{1} = \frac{A_3}{x} \Rightarrow A_3 = x \cdot A_2$$

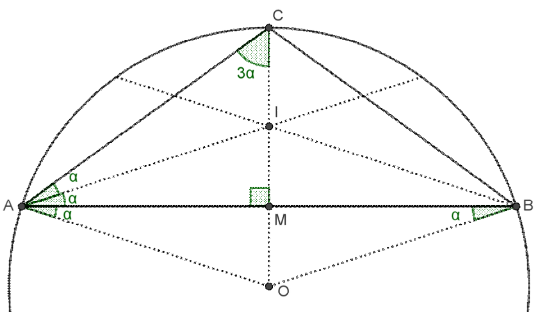
Buscamos *x* tal que $A_2 - A_3 = \dfrac{A_1}{2} + A_3 \Rightarrow A_2 - x \cdot A_2 = \dfrac{\Phi}{2} A_2 + x \cdot A_2$

Cancelando $A_2 \neq 0$ nos queda la ecuación

$$1 - x = \frac{\Phi}{2} + x \Rightarrow x = \frac{2-\Phi}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{8} \simeq 0{,}0955 \text{ dm} = 0{,}955 \text{cm}$$

39. En un triángulo *ABC* el incentro (*I*) y el circuncentro (*O*) son simétricos respecto al lado *AB*. Halla los ángulos de *ABC*.

Solución



El triángulo ha de ser simétrico con respecto a la recta *OI*.

En efecto, partiendo del triángulo isósceles *OAB* (dos lados son radios), los argumentos a izquierda y derecha de la recta *OI* son los mismos, por lo que *C* ha de estar en la intersección de la recta *OI* con la circunferencia circunscrita.

Sea *M* el punto medio de *AB* y *R* el radio de la circunferencia circunscrita.

$\alpha = \widehat{OAM} = \widehat{MAI}$ por simetría. También $\alpha = \widehat{IAC}$ por ser *AI* bisectriz de $\widehat{A}$.

$OC = OA = R \Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 3\alpha$.

En el triángulo rectángulo *AMC*: $3\alpha + 2\alpha = 90º \Rightarrow \alpha = 18º$

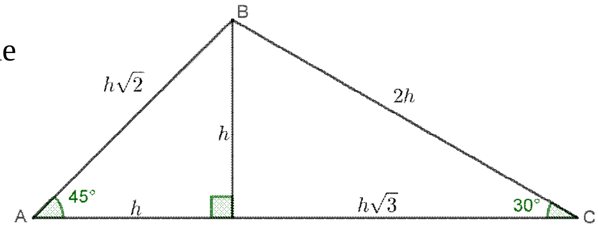
Luego los ángulos de *ABC* son $\widehat{A} = 36º$, $\widehat{B} = 36º$ *y* $\widehat{C} = 108º$

40. Se considera un triángulo *ABC* con $\widehat{BAC} = 45º$ y $\widehat{ACB} = 30º$. Si *M* es el punto medio del lado *BC*, demuestra que $BC \cdot AC = 2 \cdot AM \cdot AB$.

<u>Solución</u>

Trazando la altura *h* del vértice *B*, el triángulo se descompone en dos: medio cuadrado y medio triángulo equilátero.

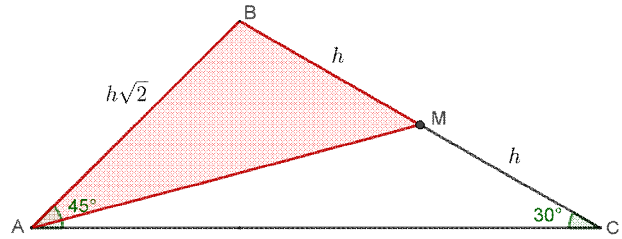
En la figura se muestran, en función de *h*, las longitudes de algunos segmentos.



Ahora trazamos la mediana *AM*:

Los triángulos *ABC* y *MBA* son semejantes y la razón de semejanza es $\sqrt{2}$. En efecto:

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABM} = 105º \quad \text{y} \quad \frac{AB}{BM} = \frac{BC}{AB} = \sqrt{2}$$



Por tanto, también $\dfrac{AC}{AM} = \sqrt{2}$.

Así: $BC \cdot AC = \sqrt{2}\, AB \cdot \sqrt{2}\, AM = 2 \cdot AM \cdot AB \quad c.q.d.$

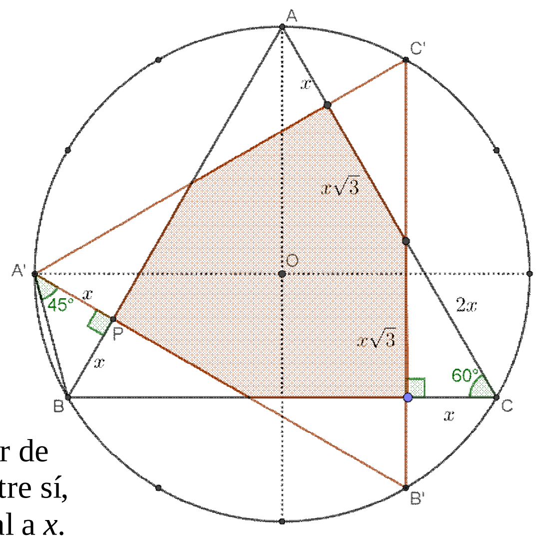
<u>Propuesta 5</u>

Un triángulo equilátero *ABC* de centro *O* y lado *l* gira 90º en torno a *O* y se transforma en el triángulo *A'B'C'*. Halla el área de la zona común a ambos triángulos.

<u>Solución 1</u>

Aplicaremos en todo el problema lo que llamo en nuestro seminario "esquema del cartabón y la escuadra" de cara a los alumnos de ESO.

Apreciaremos mejor la simetría de la figura partiendo de una circunferencia dividida en 12 partes iguales.



Notemos que la figura permanece invariable tras un giro de 120º en torno al centro *O* y que el triángulo *A'BP* (siendo *P* el punto de corte de *AB* con *A'B'*) es rectángulo e isósceles, ya que:

$$\widehat{A'PB} = 90º \quad y \quad \widehat{PA'B} = \widehat{B'A'B} = \frac{\widehat{BOB'}}{2} = 45º$$

Sea $x = PA' = PB$

Los seis triángulos rectángulos que sirven para completar- a partir de la zona común- los triángulos inicial y final, son todos iguales entre sí, pues todos ellos son del tipo 30º-60º-90º con el cateto menor igual a *x*. El otro cateto será $x\sqrt{3}$ y la hipotenusa *2x*.

Por otro lado: $AC = l = x + x\sqrt{3} + 2x \Rightarrow x = \frac{l}{3+\sqrt{3}} = \frac{l\left(3-\sqrt{3}\right)}{6}$

El área de ABC es $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

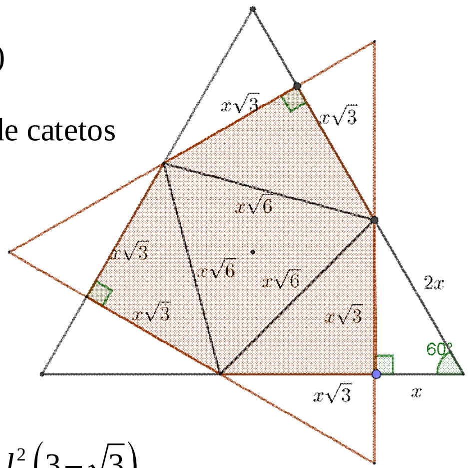
Podemos obtener el área buscada restando al área del triángulo ABC el área de tres de estos triángulos rectángulos:

$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} - 3\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} - \frac{3l^2\left(3-\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{36\cdot 2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} - \frac{l^2\left(2-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{4} = \frac{l^2\left(3-\sqrt{3}\right)}{4}$$

Por tanto, el área buscada es $S = \frac{l^2\left(3-\sqrt{3}\right)}{4}$

Solución 2 (con el mismo arranque pero atacando desde el interior)

La figura se descompone en tres triángulos rectángulos isósceles de catetos $x\sqrt{3}$ y un triángulo equilátero de lado igual a la hipotenusa de los anteriores rectángulos isósceles, es decir, de lado $x\sqrt{6}$.



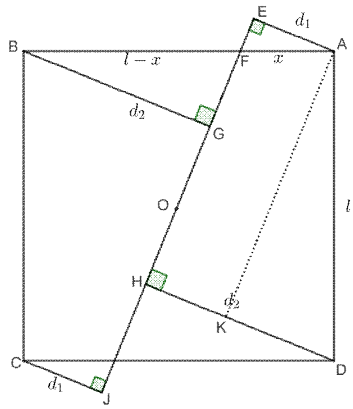
Ahora sólo queda hacer cuentas:

$$S = 3\cdot\frac{3x^2}{2} + \frac{\left(x\sqrt{6}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3x^2}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{l^2\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{36}\cdot\left(3+\sqrt{3}\right) = \frac{l^2\left(3-\sqrt{3}\right)}{4}$$

41. Se traza una recta *r* arbitraria que pasa por el centro O de un cuadrado de lado l.
Halla la suma de los cuadrados de las distancias de los vértices del cuadrado a la recta *r*

Solución

Aunque el problema es muy fácil utilizando Geometría Analítica, proponemos una solución menos mecánica, más visual y juguetona.



La simetría de centro *O* hace que sólo tengamos que hablar de dos distancias distintas, que denotaremos por d_1 y d_2. Sean E y *H* los pies de las perpendiculares a *r* desde *A* y *D*. La paralela a *r* desde *A* corta al segmento *DH* en *K*.

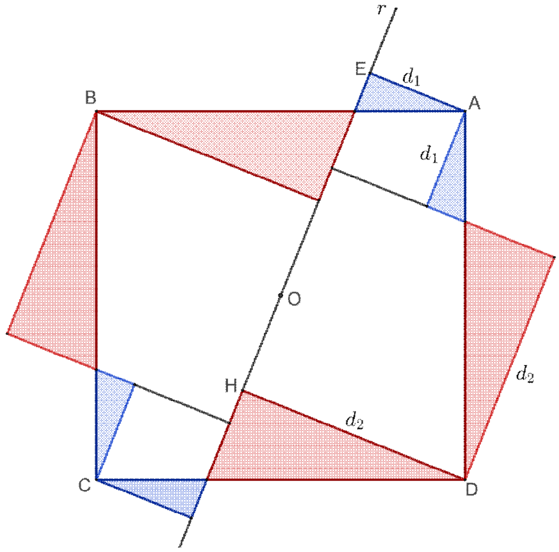
Sea $x = AF \Rightarrow BF = l - x$

Es fácil ver que los triángulos rectángulos *AEF*, *BGF* y *AKD* son semejantes entre sí, por lo que: $\frac{d_1}{x} = \frac{d_2}{l-x} = \frac{d_1+d_2}{l}$

La última razón, obtenida mediante una propiedad básica de las proporciones, me indica a su vez que $EH = AK = d_1 + d_2$.

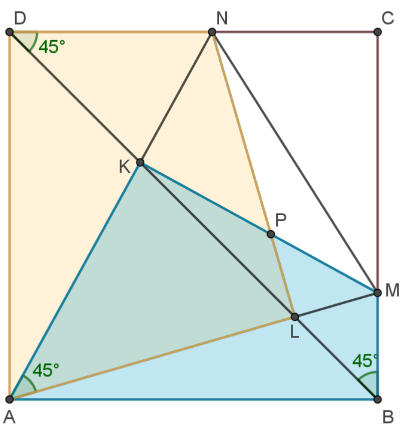
El triángulo *AKD* nos da la clave, pues sus catetos son $AK = d_1 + d_2$, $KD = d_2 - d_1$ y su hipotenusa es $AD = l$. Aplicando el teorema de Pitágoras:
$(d_1 + d_2)^2 + (d_2 - d_1)^2 = l^2 \Rightarrow 2(d_1^2 + d_2^2) = l^2$. La suma buscada es l^2.

La relación $EH = d_1 + d_2$ nos permite confeccionar la siguiente figura-puzzle que el curioso lector justificará. Con ella se demuestra gráficamente que: $2(d_1^2 + d_2^2) = l^2$ sin más que someter las piezas triangulares marcadas en rojo o en azul a un giro de 90º desde el exterior hacia el interior del cuadrado *ABCD*:



42. En un cuadrado *ABCD* elegimos un punto cualquiera *M* del lado *BC* y el punto *N* del lado *CD* tal que $\widehat{MAN} = 45º$. Las rectas *AM* y *AN* cortan a la diagonal *BD* respectivamente en los puntos *L* y *K*. Los segmentos *KM* y *LN* se cortan en *P*. Demuestra que la recta *AP* es perpendicular a *MN*.

<u>Solución</u>



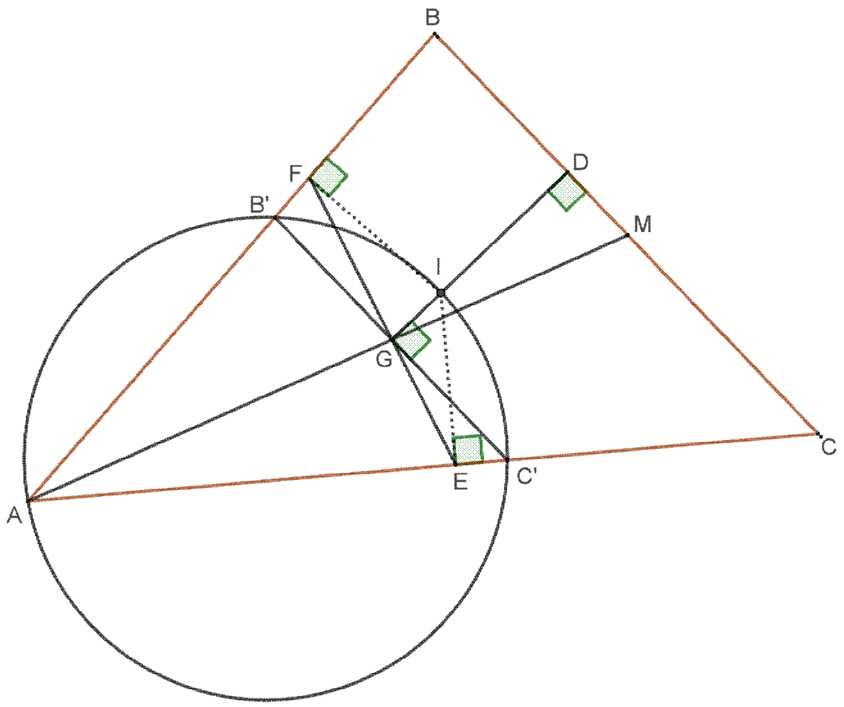
El segmento *NL* se ve bajo un ángulo de 45º desde *A* y desde *D*. Por tanto, el cuadrilátero *ALND* es cíclico, y puesto que $\widehat{ADN} = 90º$, debe ser $\widehat{ALN} = 90º$.

El segmento *KM* se ve bajo un ángulo de 45º desde *A* y desde *B*. Por tanto, el cuadrilátero *ABMK* es cíclico, y puesto que $\widehat{ABM} = 90º$, debe ser $\widehat{AKM} = 90º$.

Hemos visto que *LN* y *KM* son dos alturas del triángulo *AMN*.
Su punto de corte *P* es el ortocentro de *AMN*, por lo que la tercera altura está contenida en la recta *AP* y ha de ser perpendicular al tercer lado *MN* c.q.d.

43. La circunferencia inscrita en el triángulo *ABC* toca a los lados *BC*, *CA* y *AB* en *D*, *E* y *F*. La perpendicular por *D* a *BC* corta a *EF* en *G*. Demuestra que G está en la mediana que parte del vértice A.

<u>Solución</u>



Trazamos por *G* la paralela a *BC*, que corta a *AB* en *B'* y a *AC* en *C'*.

Bastará con demostrar que *B'G=GC'*.

Es claro que $IG \perp B'C'$, pues $IG \perp BC$

También tenemos que $IE \perp AC' \ \ y \ \ IF \perp AB'$

Los pies de las perpendiculares desde *I* a los lados del triángulo *AB'C'* están alineados en la recta *FGE*, por lo cual (Teorema de Wallace-Simson) podemos asegurar que *I* pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo *AB'C'*.

Por otra parte, al ser *AI* la bisectriz del ángulo $\widehat{BAC}$, *I* es el punto medio del arco $\widehat{B'C'}$, por lo que *IG*, al ser perpendicular a $B'C'$ es la sagita de dicho arco y divide la cuerda en dos segmentos iguales. Luego $B'G = GC'$.

O también se puede razonar así: los arcos $\widehat{B'I} \ y \ \widehat{IC'}$ son iguales. y también son iguales sus cuerdas ($B'I = IC'$ y los triángulos rectángulos $\triangle B'IG$ y $\triangle C'IG$ son congruentes, por lo que $B'G = GC'$.

Ahora sólo queda aplicar la homotecia de centro *A*, que transforma $\triangle AB'C'$ en $\triangle ABC$ para asegurar que *AG* corta a *BC* en su punto medio *M*, por lo que *G* pertenece a la mediana *AM* c.q.d.

44. Sea *ABC* un triángulo. La bisectriz de *A* corta al lado *BC* en *X*. La perpendicular a *AX* por *X* corta a *AB* en *Y*. La perpendicular a *AB* por *Y* corta a *AX* en *Z*. *XY* corta a la mediana de *A* en *S*. Prueba que *ZS* es perpendicular a *BC*.

Solución

Si el triángulo es isósceles (*AB*=*AC*) es evidente.
Si no lo es (por ejemplo, *AB*>*AC*) podemos proceder como sigue:

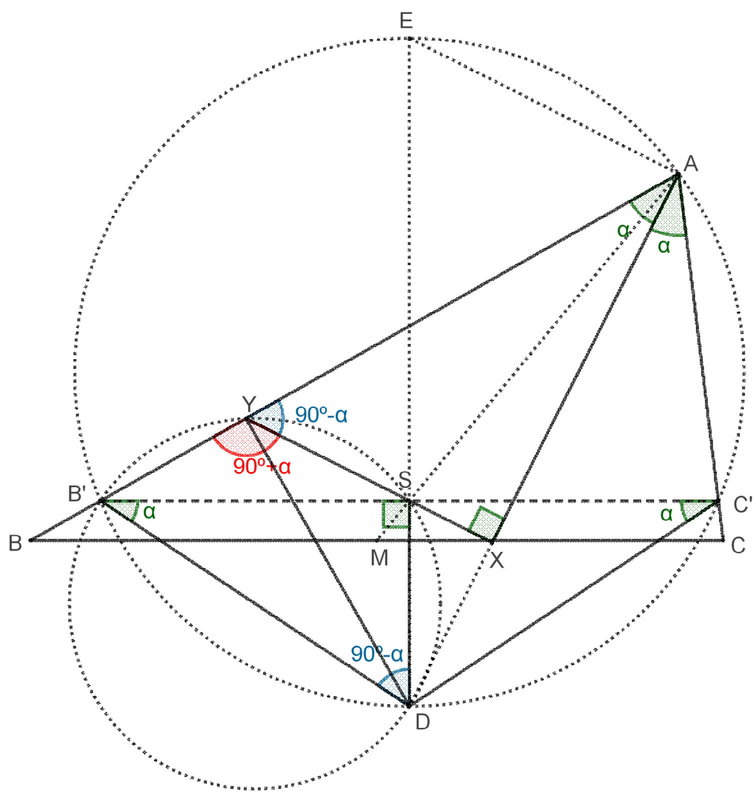
Trazamos por *S* la paralela a *BC* que cortará a *AB* en *B'* y a *AC* en *C'*, siendo *S* el punto medio de *B'C'*. Aplicaremos al triángulo *AB'C'* algunos resultados conocidos:

1) Las bisectrices interior y exterior de *A* cortan a la circunferencia circunscrita a *AB'C'* en dos puntos diametralmente opuestos *D* y *E*.

2) *ED* es la mediatriz del lado *B'C'* (por tanto contiene a *S*).

Trataremos de demostrar que $D \equiv Z$, para lo que bastará con probar que *YD* es perpendicular a *AB*, pues el punto de intersección de esta perpendicular con la bisectriz *AX* es único.

Por comodidad denotaremos $\widehat{BAC} = 2\alpha$



La igualdad de ángulos inscritos con igual arco sobre la circunferencia circunscrita a AB’C’ nos asegura que $\widehat{SB'D} = \widehat{B'AD} = \alpha = \widehat{SC'D} = \widehat{DAC'}$

Por tanto:
$\widehat{BYS} = 180º - \widehat{AYX} = 90º + \alpha$, mientras que $\widehat{B'DS} = 90º - \alpha$

En consecuencia, el cuadrilátero $B'YSD$ es cíclico pues $\widehat{B'YS} + \widehat{SDB'} = 180º$

El segmento *B’D* se ve bajo ángulo recto desde S, por lo que es diámetro de la circunferencia circunscrita a $B'YSD$ y se verá también bajo ángulo recto desde *Y*, con lo que hemos probado que $\widehat{B'YD} = 90º$ y por tanto $YD \perp AB$, lo cual nos asegura, como hemos explicado antes, que $D \equiv Z$, es decir $ZS \perp BC$ c.q.d.