Seminario de problemas Curso 2017-18. Hoja 3

16. Juanmi quiere invitar a los asistentes al seminario de problemas a pinchos en la Laurel y seguro que le sale por más de 7€. Si suponemos que solo tiene vales de 3€y 5€, demostrar que podrá pagar cualquier cantidad con esos vales.

Solución:

La proposición es válida para 8 €. Supongamos que la propoisción es válida para una suma de k€, donde n es un número entero mayor o igual que 8. Pueden ocurrir dos cosas, "la suma de n€ se puede pagar con billetes de 3€" o "para pagar la suma de n€ se precisa de, al menos, un billete de 5€". En el primer caso habrá no menos de tres billetes de 3€ ya que $n > 8$ y para pagar $n+1$€ bastará substituir tres billetes de 3€ por dos billetes de 5€. En el segundo caso, para pagar la suma de $n+1$ € substituimos un billete de 5€ por dos billetes de 3€.

17. ¿Se cumple que $7^n - 1$ es múltiple de 6 para cualquier valor entero n?

Solución:

Se cumple que

$$7^n - 1 = (7-1)(7^{n-1} + 7^{n-2} + \ldots + 7 + 1)$$

Se puede observar que el factor de la izquierda es 6 mientras que el de la derecha es un número entero. Por lo tanto $7^n - 1$ es divisible entre 6.

18. Encuentra todos los valores enteros positivos n tales que $17^{n-1} + 19^{n-1}$ divide a $17^n + 19^n$.

Solución:

Se cumple que

$$17(17^{n-1} + 19^{n-1}) < 17^n + 19^n < 19(17^{n-1} + 19^{n-1})$$

Dado que $17^{n-1} + 19^{n-1}$ divide a $17^n + 19^n$, entonces

$$17^n + 19^n = 18(17^{n-1} + 19^{n-1}) = (17+1)17^{n-1} + (19-1)19^{n-1} = 17^n + 17^{n-1} + 19^n - 19^{n-1}$$

del cual se desprende que necesariamente $17^{n-1} = 19^{n-1}$. Por lo tanto solo se cumple para el caso $n = 1$ para el cual $17^{n-1} + 19^{n-1} = 2$ divide $17^n + 19^n = 36$.

19. Demostrar que

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots + \frac{n}{4^n} < \frac{1}{2}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

No es necesaria la inducción para resolver este problema. Simplemente necesitamos calcular el valor de la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$$

Suponemos que el valor de la suma es

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots = S$$

Entonces tenemos que

$$\frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \cdots = \frac{S}{4}$$

Restando $\frac{S}{4}$ *de* S *tenemos que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots &= \frac{3S}{4} \\ \iff \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} &= \frac{3S}{4} \\ \iff & \boxed{S = \frac{4}{9}} \end{aligned}$$

Como $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4^k}$ *crece cuando* n *crece, y* $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$*, entonces obtenemos el resultado.*

20. Para cada número natural k, llamaremos $i(k)$ al mayor divisor impar de k. Eligiendo un número natural n, debemos calcular

$$i(n+1) + i(n+2) + i(n+3) + \ldots + i(2n)$$

Solución:

Denotaremos $S(n) = i(n+1) + i(n+2) + i(n+3) + \ldots + i(2n)$, $n = 1, 2, \ldots$. *Probaremos por inducción que* $S(n) = n^2$. *Comprobamos el caso base:*

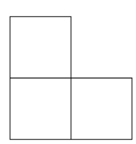
$$S(1) = i(2) = 1, S(2) = i(3) + i(4) = 3 + 1 = 4 = 2^2$$

Supongamos que para un $n \geq 1$ *es* $S(n) = n^2$. *Entonces, aplicando la Hipótesis Inductiva:*

$$\begin{aligned} S(n+1) &= i(n+2) + \ldots + i(2n) + i(2n+1) + i(2n+2) = \\ &= n^2 - i(n+1) + i(2n+1) + i(2n+2) \\ &= n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

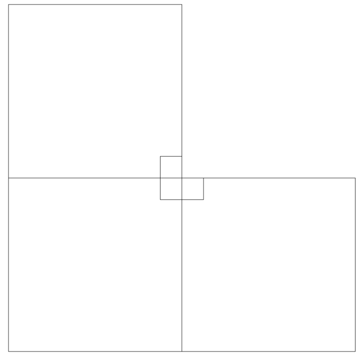
donde hemos aplicado que $i(2n+2) = i(n+1)$ *(el mayor divisor impar de* $2n+2 = 2(n+1)$ *es el mismo que el de* $n+1$*) y que* $i(2n+1) = 2n+1$ *(ya que* $2n+1$ *es un número impar).*

21. Para cada número natural n, elegimos un tablero $2^n \times 2^n$ y le quitamos uno de sus cuadrados. Prueba que el tablero restante puede ser cubierto (sin que se solapen) por piezas como las que muestran en la figura.



Solución:

Probaremos por inducción. Para el caso base $n = 1$*, al quitar un cudrado a un tablero 2x2 queda una pieza como la de la figura. Luego el resultado es cierto. Supogamos que el resultado se verifica para un entero positivo* $n = k$*. Consideramos un tablero* $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ *y le quitamos un cuadrado unitario. Lo dividimos, de manera simétrica en 4 tableros* $2^k \times 2^k$*. Llamamos* V *al vértice común a los 4. El cuadrado unitario está en uno de ellos; luego ese lo cubrimos por piezas como la de la figura (usando la H.I.).*



Ahora, colocamos una pieza como la de la figura cubriendo los tres cuadrados unitarios que tienen a V por vértice. Por lo tanto quedan por tapar 3 cuadrados $2^k \times 2^k$, a cada uno de los cuales les hemos quitado un cuadrado unitario. Usando la H.I., lo sabemos cubrir, y cubrimos, cada uno de ellos.

22. Se consideran n sillas colocadas en fila y en las que estén sentadas n personas. En un momento dado, las n personas se levantan y se vuelven a sentar donde estaban o en la silla de al lado (derecha o izquierda). Observad que las esquinas solo tienen dos movimientos en vez de tres. ¿De cuántas formas se pueden sentar las n personas en estas n sillas (sin que quede ninguna libre) siguiendo esta condición.

Solución:

Inductivamente, llegamos a la conclusión de que las distintas formas en las que pueden sentarse "n" personas en "n" sillas vienen dadas por la suma de los dos casos anteriores, es decir, el "n-1" y el "n-2". Por ejemplo, el caso de 4 sillas y 4 personas se resolvía sumando las formas posibles del caso 3 y el caso 2. Quiero demostrar que el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci está dado por:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left| \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right|$$

Llamando ϕ al número de oro, la anterior igualdad satisface la siguiente ecuación

$$F_i = \frac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}$$

Aplicando inducción comprobamos para el caso base:

$$F_0 = \frac{\phi^0 - \hat{\phi}^0}{\sqrt{5}} = 0$$

Suponiendo cierta la igualdad para F_i demostramos para F_{i+1}:

$$\begin{aligned}
F_{i+1} &= F_i + F_{i-1} \\
&= \frac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{i-1} - \phi^{\widehat{i-1}}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\phi + \hat{\phi}\right)\left(\phi^i - \hat{\phi}^i\right) - \phi\hat{\phi}\left(\phi^{i-1} - \phi^{\widehat{i-1}}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\phi^{i+1} - \phi\hat{\phi}^i + \hat{\phi}\phi^i - \phi^{\widehat{i+1}} - \phi^i\hat{\phi} + \phi\hat{\phi}^i}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\phi^{i+1} - \phi^{\widehat{i+1}} - \phi\hat{\phi}^i + \phi\hat{\phi}^i - \hat{\phi}\phi^i + \hat{\phi}\phi^i}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\phi^{i+1} - \phi^{\widehat{i+1}}}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

El problema apareció en el Periódico El País, como se puede observar en el siguiente enlace a la solución del problema

23. Para pertenecer al club de socios del Logroñés cada nuevo socio debe pagar como cuota de inscripción a cada miembro del club la misma cantidad que él tuvo que pagar en total cuando ingresó más un euro. Si el primer socio pagó un euro, ¿cuanto deberá pagar en total el socio 2017?

Solución:

Llamamos a_n la cantidad que tiene que pagar el n-ésimo socio del Logroñés por entrar al club de socios. Observamos que $a_2 = 2$, ya que se le tiene que pagar el euro que pagó el primer socio más un euro más, mientras que el socio que hace n-ésimo socio pagará:

$$a_k = (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \ldots + (a_{n-2} + 1) + (a_{n-1} + 1)$$

Observamos que la suma anterior excepto el último termino es igual a a_{n-1}, luego $a_n = 2a_{n-1} + 1$ para $n > 2$. Analicemos un poco la sucesión:

$$a_3 = 2a_2 + 1, a_4 = 4a_2 + 3, a_5 = 8a_2 + 7, a_6 = 16a_2 + 15, \ldots$$

Por lo tanto se tiene que:

$$a_n = a_2 2^{n-2} + 2^{n-2} - 1 = (a_2 + 1)2^{n-2} - 1 = 3 \cdot 2^{n-2} - 1,$$

teniendo en cuenta que $a_2 = 2$. Completamos la prueba por inducción. Como ya hemos visto que $a_2 = 2$ solo falta comprobar que si $a_k = 3 \cdot 2^{k-2} - 1$, entonces se cumple que $a_{k+1} = 3 \cdot 2^{k-1} - 1$. Usando la ecuación que define la sucesión:

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2(3 \cdot 2^{k-2} - 1) + 1 = 3 \cdot 2^{k-1} - 1.$$

En consecuencia lo que tiene que pagar el socio n-ésimo es $3 \cdot 2^{n-2} - 1$ euros. En particular, el miembro 2017 tiene que pagar $3 \cdot 2^{2015} - 1$, aproximadamente 10^{607} euros. El problema pertenece a la Fase Local LII Olimpiada Matematica Española

24. Sea a, b enteros positivos, con $a > 1$ y $b > 2$. Demostrar que $a^b+1 \geq b(a+1)$ y determinar cuándo se tiene la igualdad.

Solución:

Procedemos por inducción sobre b. *Para* $b = 3$, *se tiene que* $a^3+1 = (a+1)(a^2-a+1)$. *Para mostrar que esta expresión es mayor que* $3(a+1)$ *es suficiente demostrar que* $(a^2-a+1) \geq 3$, *lo cual es cierto pues* $a^2 - a + 1 > a(a-1) \geq 2$. *Ahora suponemos que la expresión es cierta para algún valor de* b, *es decir, se cumple que* $a^b + 1 \geq b(a+1)$. *Se demostrará ahora para* $b+1$. *Nótese que:*

$$a^{b+1} + 1 = a(a^b + 1) - (a+1) + 2 \geq ab(a+1) - (a+1) + 2,$$

donde la última desigualdad se tiene por la hipótesis de inducción. La última expresión se puede reescribir como:

$$ab(a+1) - (a+1) + 2 = (a+1)(ab-1) + 2 > (ab-1)(a+1).$$

Finalmente, $ab - 1 \geq 2b - 1 = (b+1) + (b-2) > b+1$, *lo cual es cierto. Por tanto, la desigualdad se vuelve estricta después de* $b = 3$. *Retormando el caso* $b = 3$, *se observa que* $a(a-1) = 2$ *únicamente cuando* $a = 2$. *Por tanto, se ha demostrado por inducción que la desigualdad siempre se tiene, y que la igualdad se da únicamente en el caso* $a = 2, b = 3$. *El problema pertenece a la OMCC 2003.*