Seminario de problemas Curso 2016-17. Hoja 3. Soluciones

15. (a) En una isla hay 13 camaleones blancos, 15 verdes y 17 rojos. Cuando se encuentran dos camaleones de distinto color, los dos se vuelven del otro tercer color. ¿Pueden ser blancos en algún momento todos los camaleones?

(b) Paula tiene una gran caja que contiene en su interior ocho cajas más pequeñas. A su vez, cada una de las cajas pequeñas puede estar vacía o bien contener ocho cajas más pequeñas y así sucesivamente. ¿Puede haber mil cajas vacías dentro de la gran caja?

Solución.

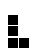
(a) Fijarse que módulo 3 tenemos

$$\begin{aligned} 13 &\equiv 1 \pmod 3, \\ 15 &\equiv 0 \pmod 3, \\ 17 &\equiv 2 \pmod 3, \end{aligned}$$

luego el conjunto de los restos módulo 3 de los números de camaleones de cada color inicialmente es $\{0, 1, 2\}$.

En cada encuentro este conjunto permanece invariable, como se puede comprobar. Por tanto nunca podrán ser todos los camaleones blancos porque en ese caso, como $45 \equiv 0 + 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3$, el conjunto de restos módulo 3 sería $\{0, 0, 0\}$.

(b) Paula podría llenar la gran caja con 8 cajas vacías, $8 \equiv 1 \pmod 7$. Si ahora llena una de estas cajas vacías con 8 cajas vacías, el número total de cajas vacías $(-1 + 8)$ se incrementa en 7, y así sucesivamente, por tanto el número total de cajas vacías N cumple siempre $N \equiv 1 \pmod 7$. Como $1000 \equiv 6 \pmod 7$, la gran caja de Paula no puede contener 1000 cajas vacías.

16. Las siguientes figuras:  (Eli), (Gordi), (Finito), (Botón) y (Volquete) son los cinco *tetrominós*, unos bichitos planilandeses compuestos de cuatro células cuadradas 1×1 adosadas por alguno de sus lados. Todos ellos se pueden mover y voltear, así Eli y Volquete aparecen indistintamente como  y .

(a) ¿Se puede recubrir exactamente un tablero rectangular (2×10 o 4×5) con un ejemplar de cada tetrominó?

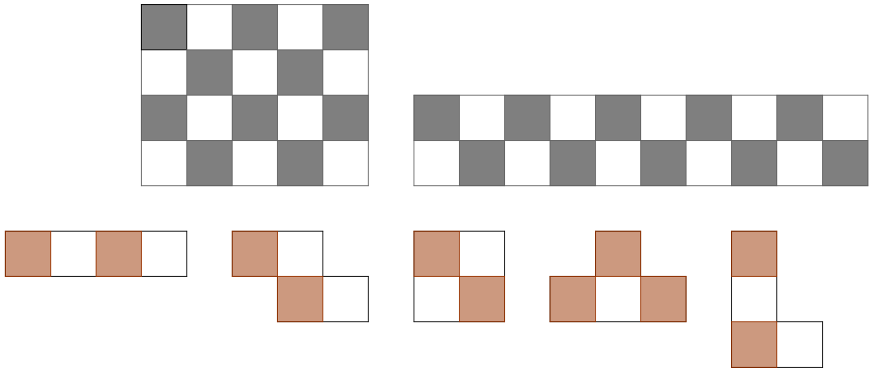
(b) ¿Se puede recubrir exactamente un tablero 10×10 con veinticinco  ?

(c) ¿Se puede recubrir exactamente un tablero 8×8 con un y quince  ?

(d) ¿Se puede recubrir exactamente un tablero 8×8 con un y quince de tipo  o ?

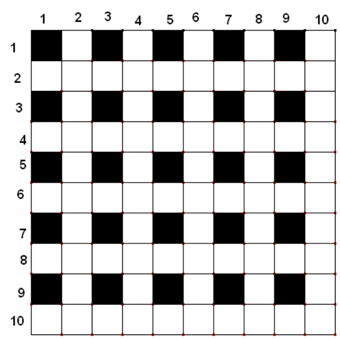
Solución.

(a) Es imposible. Considerar los rectángulos coloreados en ajedrezado. Hay un número par de cuadrados unitarios de cada color (son 10 de cada).



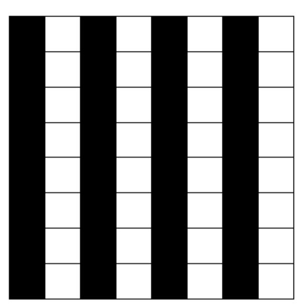
Cuatro de los cinco tetrominós cubrirán dos cuadrados unitarios de cada color, pero  cubrirá tres de un color y uno del otro. Con los cinco tetrominós se cubriría en total un número impar de cuadrados unitarios blancos y un número también impar de cuadrados unitarios grises.

(b) Es imposible. Podemos considerar la siguiente coloración de las casillas del tablero:



Hay 25 casillas negras. Cada pieza puede recubrir o 0 o 2 casillas negras; veinticinco recubrirían un número par de casillas negras, así que no pueden recubrir el tablero.

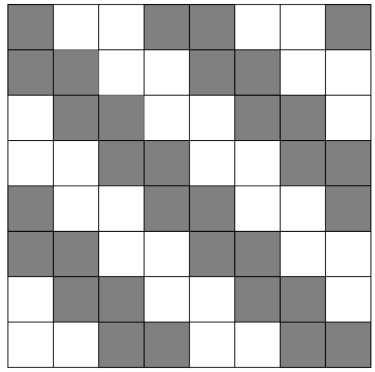
(c) Es imposible. Podemos considerar la siguiente coloración de las casillas del tablero:



Hay 32 casillas negras. La pieza  recubrirá 2 casillas negras.

Las piezas  recubren 1 o 3 cuadros negros. Como son quince, el número de casillas negras que recubrirían es impar y por tanto distinto de 30.

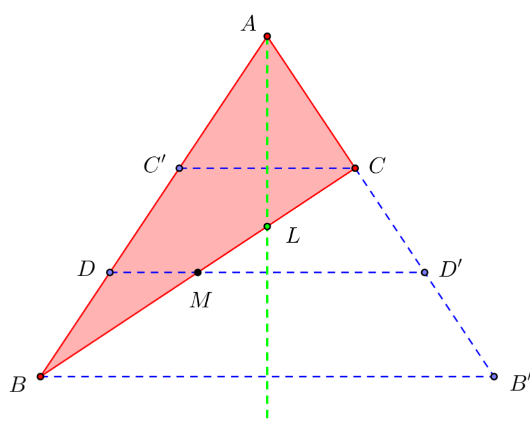
(d) Es imposible. Considerar la siguiente coloración de las casillas del tablero:



Ahora las piezas o  cubren 0, 2 o 4 cuadros unitarios de cada color y la pieza  cubre un número impar de cuadros unitarios de cada color (1 o 3). Pero en el tablero tenemos 32 cuadros unitarios de cada color.

17. Sea M el punto medio del lado BC de un triángulo ABC. Suponemos $AB > AC$. Sea AL la bisectriz interior del ángulo A. La recta que pasa por M y es perpendicular a AL corta al lado AB en el punto D. Prueba que $AD = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

Solución.



DD' es la paralela media del trapecio $BB'CC'$, por lo tanto

$$\frac{AC + AB}{2} = AD.$$

18. ¿Puedes encontrar una fórmula cerrada, es decir, una expresión sin puntos suspensivos, para la suma

$$1^3 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + \ldots + (-1)^{n+1}(2n-1)^3,$$

donde $n \geq 1$ es un número natural cualquiera?

Solución.

Sea $f(n)$ la expresión para la que estamos tratando de encontrar una fórmula cerrada,

$$f(n) := 1^3 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + \ldots + (-1)^{n+1}(2n-1)^3.$$

Lo primero que hacemos es construir una tabla de valores de $f(n)$ para n pequeños:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	1	-26	99	-244	485	-846	1351	-2024

Vemos que los valores de $f(n)$ son de signos alternados, y también podemos darnos cuenta de que n divide a $f(n)$ en los casos que vemos en la tabla (¡incluso en el siguiente que ya no hemos escrito!). Entonces puede tener sentido que tabulemos unos valores "reducidos" $|f(n)|/n$, como en la siguiente tabla:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lvert f(n)/n \rvert$	1	13	33	61	97	141	193	253

Ah, ¿conque todos los valores son ahora impares? pues vamos a restarles una unidad a todos a ver qué pasa:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\lvert f(n)/n \rvert - 1$	0	12	32	60	96	140	192	252

Es innegable que todos estos números de ahora son divisibles por 4. Pues los dividimos por 4:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$(\lvert f(n)/n \rvert - 1)/4$	0	3	8	15	24	35	48	63

CONJETURA: $(|f(n)/n|-1)/4 = n^2-1$, es decir, deshaciendo con cuidado los "cambios" que hemos hecho,

$$f(n) = (-1)^{n+1}n\big(4(n^2-1)+1\big) = (-1)^{n+1}n(4n^2-3) \quad \text{si } n \geq 1. \tag{1}$$

Como parece que esta puede ser la fórmula correcta (lo es para $n = 1, 2, \ldots, 8$), vamos a probar que en efecto es siempre cierta, y lo vamos a demostrar por el " método de inducción".

Esto quiere decir que vamos a usar un axioma, o principio básico, de la Aritmética, que se llama ***Principio de inducción***, que afirma lo siguiente (su enunciado admite alguna variante):

Si una propiedad $P(n)$ que se enuncia en función de un número natural n cumple estas dos cosas:

I: Es cierta para $n = 1$ y

II: Si se supone cierta para $n = k$ con $k \geq 1$ (y a esta suposición la llamamos *hipótesis de inducción*, **(H.I.)**), **entonces se puede probar que es también cierta para $n = k + 1$,**

entonces $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

En nuestro caso, la propiedad $P(n)$ es la validez de la propia fórmula (1),

$$\boxed{f(n) := 1^3 - 3^3 + 5^3 + \ldots + (-1)^{n+1}(2n-1)^3 \stackrel{?}{=} (-1)^{n+1}n(4n^2-3)}$$

Así que:

Paso I ¿Es cierta la fórmula para $n = 1$? Sí: $f(1) = 1$ y $(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (4 \cdot 1^2 - 3) = 1$.

Paso II Si suponemos que la fórmula es cierta para un valor de $n \geq 1$ concreto pero cualquiera, digamos que para $n = k$ (H.I.), ¿podemos probar que es cierta para $n = k+1$?

Veamos, supongamos que $f(k) := 1^3 - 3^3 + 5^3 + \ldots + (-1)^{k+1}(2k-1)^3 = (-1)^{k+1}k(4k^2-3)$ para un $k \geq 1$ (H.I.). Entonces,

$$\begin{aligned}
f(k+1) &= 1^3 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + \ldots + (-1)^{k+1}(2k-1)^3 + (-1)^{k+2}(2k+1)^3 \\
&= f(k) + (-1)^{k+2}(2k+1)^3 \\
&\overset{H.I.}{=} (-1)^{k+1}k(4k^2-3) + (-1)^{k+2}(2k+1)^3 \\
&= (-1)^{k+2}\big((2k+1)^3 - 4k^3 + 3k\big) \\
&= (-1)^{k+2}(4k^3 + 12k^2 + 9k + 1) \\
&= (-1)^{k+2}(k+1)(4k^2 + 8k + 1) \\
&= (-1)^{k+2}(k+1)\big(4(k+1)^2 - 3\big),
\end{aligned}$$

y la fórmula ha quedado probada para $n = k + 1$.

Por el *principio de inducción* se deduce ahora que la fórmula conjeturada,

$$\boxed{1^3 - 3^3 + 5^3 + \ldots + (-1)^{n+1}(2n-1)^3 = (-1)^{n+1}n(4n^2-3)}$$

es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

19. En la página de pasatiempos de un periódico se proponía este problema: "Dos niños, Antonio y José, tienen 160 tebeos entre los dos. Antonio cuenta los suyos de 7 en 7 y le sobran 4. José cuenta los suyos de 8 en 8 y también le sobran 4. ¿Cuántos tebeos tiene cada uno?"

Al día siguiente en el periódico se daba esta solución: "Antonio tiene 60 tebeos y José 100". ¿Puedes comentar algo sobre esta solución?

Solución.

Si Antonio tiene $x \equiv 4 \pmod 7$ tebeos, José tiene $160 - x \equiv 4 \pmod 8$. Hay entonces dos enteros u y v tales que

$$\left.\begin{aligned} x &= 7u + 4 \\ 160 - x &= 8v + 4 \end{aligned}\right\},$$

de donde se deduce

$$160 = 7u + 8v + 8;$$

aquí el sumando $7u$ tiene que ser múltiplo de 8, como lo son los demás, luego $u = 8u_1$ con u_1 entero. Sustituyendo y dividiendo la ecuación por 8 queda

$$7u_1 + v = 19, \qquad \text{o bien} \qquad v = 19 - 7u_1.$$

Las únicas soluciones enteras de esta *ecuación diofántica* para las que x y $160 - x$ son ambos positivos se ven en la tabla siguiente. Hay tres posibilidades y el periódico solo dio una.

u_1	u	v	x	$160 - x$
0	0	19	4	156
1	8	12	60	100
2	16	5	116	44

20. (a) Prueba que si el número natural n es mayor que 1, el número $n^4 + 4^n$ nunca es primo.

(b) Descompón en producto de dos factores el número $13^8 + 2016 \cdot 312558750$.

Solución.

(a) **Identidad de Sophie Germain:**

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab).$$

Si n es par, $n^4 + 4^n$ es par (y mayor que 2).

Si n es impar, $n = 2m + 1$ y

$$n^4 + 4^n = n^4 + 4^{2m+1} = n^4 + 4 \cdot (2^m)^4.$$

Aplicando la identidad de Sophie Germain tenemos:

$$\begin{aligned} n^4 + 4^n &= n^4 + 4 \cdot (2^m)^4 \\ &= \left(n^2 + 2(2^m)^2 + 2n(2^m)\right)\left(n^2 + 2(2^m)^2 - 2n(2^m)\right). \end{aligned}$$

(b) En primer lugar, descomponiendo en factores el segundo sumando podemos escribir

$$13^8 + 2016 \cdot 312558750 = 169^4 + 4 \cdot 630^4.$$

Aplicando ahora en esta expresión la identidad de Sophie Germain tenemos

$$\begin{aligned} &169^4 + 4 \cdot 630^4 \\ &= (169^2 + 2 \cdot 630^2 + 2 \cdot 169 \cdot 630)(169^2 + 2 \cdot 630^2 - 2 \cdot 169 \cdot 630) \\ &= 609421 \cdot 1035301. \end{aligned}$$