Seminario de problemas Curso 2020-21. Hoja 3

13. Si dispones de 25 caballeros para la batalla, entonces 25! = 155112100□3330985984 · $10^{□}$, son todas las formas de disponer a todos tus caballeros en fila.
¡Vaya! Se han borrado dos de las cifras. ¿Sabrías calcular los números que faltan en los cuadrados?

Solución

25! = 1 · 2 · 3 · 4 ·… · 24 · 25 es en particular múltiplo de 9, luego la suma de sus cifras también debe serlo.

1 + 5 + 5 + 1 + 1 + 2 + 1 + 0 + 0 + □ + 3 + 3 + 3 + 0 + 9 + 8 + 5 + 9 + 8 + 4

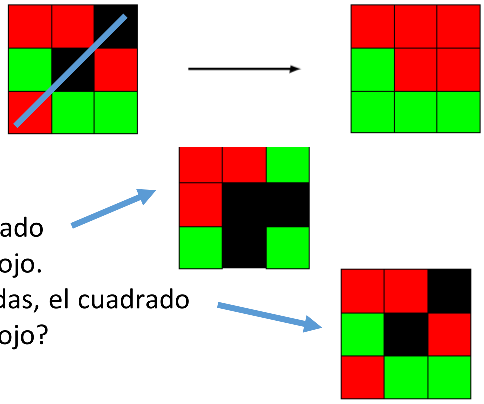
La suma de las cifras visibles es 68, luego le falta 4 para 72, que es el único múltiplo de 9 posible.

Por otra parte, para conocer el número de ceros en que acaba 25!, hay que fijarse que, para que un número acabe en 0, debe ser múltiplo de 2 y de 5. Contemos el número de factores 5 ya que es menor que el de 2.

En el número 25 hay $\frac{25}{5} = 5$ múltiplos de 5 y $\frac{25}{25} = 1$ múltiplo de 25 = 5^2.

En total, en 25! está 5 + 1 = 6 veces el factor cinco, luego acaba en 6 ceros y es 6 el exponente de 10 que falta.

14. Considera un cuadrado, como el ejemplo, partido en nueve subcuadrados. Cada uno de estos subcuadrados está pintado de **rojo**, **verde** o **negro**. Una *repintada* de este cuadrado consiste en coger una fila, columna o diagonal, y alterar los colores de modo que cambiamos **rojo** por **verde**, **verde** por **negro** y **negro** por **rojo**.



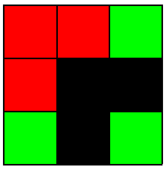
a) Transforma, mediante una sucesión de repintadas, el cuadrado en un cuadrado con todos sus subcuadrados pintados de rojo.

b) ¿Se puede transformar, mediante una sucesión de repintadas, el cuadrado en un cuadrado con todos sus subcuadrados pintados de rojo?

<u>Solución</u>

a) Asignemos un número a cada color. Por ejemplo: **Rojo** = 0; **Verde** = 1; y **Negro** = 2.

En cada repintada: **Rojo** = 0 ⟶ **Verde** = 1 ⟶ **Negro** = 2 ⟶ **Rojo** = 0



0	0	1
0	2	2
1	2	1

⇒

0	0	2
0	0	2
2	2	1

⇒

0	0	2
0	0	2
0	0	2

⇒

0	0	0
0	0	0
0	0	0

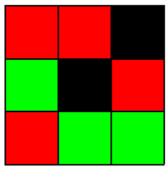
Sumas 9 9 6 0

b) Respecto a la suma del color de todas los subcuadrados, cada vez que se repinta una fila, columna o diagonal, se está sumando 3 (3 = 1 + 1 + 1), se queda igual (0 = 1 + 1 – 2), se resta 3 (–3 = 1 – 2 – 2) o se resta 6 (–6 = – 2 – 2 – 2).

Por tanto, si la suma de todos los colores era múltiplo de 3, lo seguirá siendo tras una repintada y, si no lo era, no podrá serlo tras una repintada.

En el cuadrado dado, para acabar con todos los cuadrados rojos (todos ceros), la suma de todos los subcuadrados debiera de ser múltiplo de 3 y no lo es dado que suman 7.

Al no ser la suma múltiplo de 3, es imposible.



0	0	2
1	2	0
0	1	1

Sumas 7

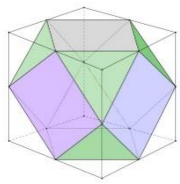
15. Algunos números pueden expresarse como suma de dos o más números consecutivos.
Por ejemplo, 4 + 5 = 9 y también 2 + 3 + 4 = 9. Expresa el número 25 como suma de dos o más números consecutivos de todas las maneras posibles y justifica que no hay más soluciones.

Solución

La suma de los términos de una progresión aritmética con primer término *n*, diferencia 1 y *d* términos, es:
$\frac{(n+(n+d-1))\cdot d}{2} = 25 \Rightarrow (2n+d-1)\cdot d = 50$
Por tanto *d* divide a 50 y las posibilidades son { 2, 5, 10, 25 y 50 } puesto que no puede ser *d* = 1 (dos o más números consecutivos)

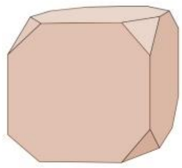
$d = 2$: $(2n + 1) \cdot 2 = 50 \Rightarrow 2n + 1 = 25 \Rightarrow 2n = 24 \Rightarrow n = 12$ 12 + 13 = 25
$d = 5$: $(2n + 4) \cdot 5 = 50 \Rightarrow 2n + 4 = 10 \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3$ 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25
$d = 10$: $(2n + 9) \cdot 10 = 50 \Rightarrow 2n + 9 = 5 \Rightarrow 2n = -4 \Rightarrow n = -2$
Si admitimos números negativos, (–2) + (–1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25
$d = 25$: $(2n + 24) \cdot 25 = 50 \Rightarrow 2n + 24 = 2 \Rightarrow 2n = -22 \Rightarrow n = -11$
(–11)+(–10)+(–9)+(–8)+(–7)+(–6)+(–5)+(–4)+(–3)+ (–2) + (–1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 25
Por último, $d = 50$: $(2n + 49) \cdot 50 = 50 \Rightarrow 2n + 49 = 1 \Rightarrow 2n = -48 \Rightarrow n = -24$
(–24) + (–23)+ … + 23 + 24 + 25 = 25

16. Se cortan las esquinas de un cubo de 10 cm de arista por los puntos medios de éstas, obteniéndose un “cuboctaedro” formado por 6 caras cuadradas y 8 triángulos equiláteros.



a) Calcula el volumen de este cuboctaedro.

En otro cubo del mismo tamaño se marcan los puntos de las aristas que distan 2 cm del vértice más cercano y, después, se cortan las esquinas por esos puntos, obteniéndose en este caso un cubo “truncado” formado por 6 caras octogonales (irregulares) y 8 triángulos equiláteros.



b) Calcula el área total de este cubo truncado.

c) ¿A qué distancia de los vértices se tendría que haber cortado las esquinas para que los octógonos del cubo truncado fuesen regulares?

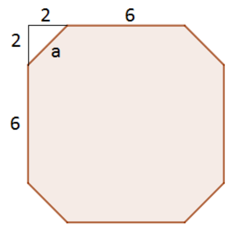
Solución

a) El volumen del cuboctaedro es el del cubo al que se le ha quitado en cada uno de sus ocho vértices una pirámide: $V = V_{cubo} - 8 \cdot V_{pirámide}$

$V_{cubo} = 10^3 = 1000\ cm^3$ $\qquad V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot 5 = \frac{125}{6}\ cm^3$

$V = 1000 - 8 \cdot \frac{125}{6} = 1000 - \frac{1000}{6} = \frac{5000}{6} = 833{,}333\ cm^3$

b) El área del cubo truncado es: $A = 8 \cdot A_{tr.equil.} + 6 \cdot A_{oct}$

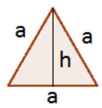


El área del octógono es el área del cuadrado al que se le han quitado cuatro pequeños triángulos equiláteros e isósceles:

$A_{oct} = 10^2 - 4 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 100 - 8 = 92\ cm^2$

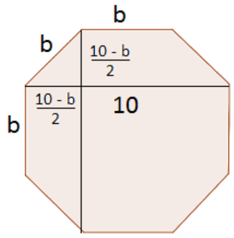
$a^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow a = \sqrt{8}$ $\qquad h^2 = (\sqrt{8})^2 - \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2 = 8 - \frac{8}{4} = 8 - 2 = 6 \Rightarrow h = \sqrt{6}$

$A_{tr.equil} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{48}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$



$A = 8 \cdot 2\sqrt{3} + 6 \cdot 92 = 16\sqrt{3} + 552 \sim 579{,}71\ cm^2$

c) $b^2 = \left(\frac{10-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{10-b}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{100-20b+b^2}{4} = \frac{100-20b+b^2}{2} \Rightarrow 2b^2 = 100 - 20b + b^2 \Rightarrow$



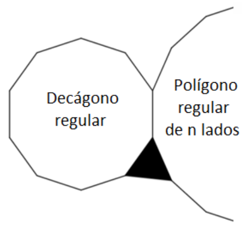
$b^2 + 20b - 100 = 0 \Rightarrow b = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot (-100)}}{2} = \frac{-20 \pm \sqrt{800}}{2} = \frac{-20 \pm 20\sqrt{2}}{2}$

$= -10 \pm 10\sqrt{2}$

Como solución válida se obtiene que $b = -10 + 10\sqrt{2} \sim 4{,}14$ cm.

La distancia de los vértices a la que hay que cortar para que los octógonos del cubo truncado fuesen regulares es $\frac{10-b}{2} = \frac{10-(-10+10\sqrt{2})}{2} = \frac{20-10\sqrt{2}}{2} \sim 2{,}93$ cm.

17. En la figura de la derecha, uno de los polígonos es de 10 lados, ¿de cuántos lados es el otro?
Descúbrelo teniendo en cuenta que el triángulo negro es equilátero.



Solución

La suma de todos los ángulos interiores de un polígono de n lados es $180° \cdot (n-2)$.

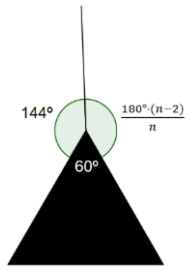
Al ser regular, todos los ángulos interiores son iguales, luego cada uno mide $\frac{180° \cdot (n-2)}{n}$.

En particular, en el polígono regular de 10 lados, cada ángulo interior mide $\frac{180° \cdot (10-2)}{10} = 144°$.

$144° + 60° + \frac{180° \cdot (n-2)}{n} = 360° \Rightarrow \frac{180° \cdot (n-2)}{n} = 360° - 144° - 60° = 156°$

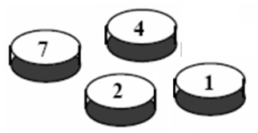
$180° \cdot (n-2) = 156° \cdot n \Rightarrow 180° \cdot n - 360° = 156° \cdot n \Rightarrow$

$180° \cdot n - 156° \cdot n = 360° \Rightarrow 24° \cdot n = 360° \Rightarrow n = \dfrac{360°}{24°} = 15$



El otro polígono es de 15 lados.

18. Lucía tiene cuatro fichas. Observa que sobre cada una de las ocho caras está indicado un número distinto, del 1 al 8. Ella lanza sus cuatro fichas una primera vez y ve aparecer 7, 2, 4 y 1, como está representado en el dibujo de la izquierda.



- Lucía lanza sus fichas una segunda vez y obtiene 6, 4, 5 y 2.
- Después una tercera vez y obtiene 8, 2, 6 y 5.
- Finalmente, la cuarta vez, obtiene 7, 4, 3 y 5.

¿Cuáles son los números dibujados en cada ficha, uno sobre una cara y el otro sobre la opuesta?

Solución

Creamos una tabla con todas las posibilidades en la que se van tachando las opciones que quedan anuladas dado que los números que han salido no pueden estar en la misma ficha:

Primer lanzamiento 1, 2, 4 y 7.

Segunda lanzamiento 2, 4, 5 y 6.

Tercera lanzamiento 2, 5, 6 Y 8.

Cuarta lanzamiento 3, 4, 5 y 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		X	–	X	O	–	X	–
2	X		O	XX	XX	XX	X	X
3	–	O		X	X	–	X	–
4	X	XX	X		X X	X	X X	O
5	O	XX	X	X X		XX	X	X
6	–	XX	–	X	XX		O	X
7	X	X	X	X X	X	O		–
8	–	X	–	O	X	X	–	

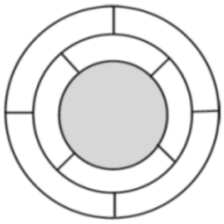
De todas las celdas sin marcar hay que fijarse primeramente en aquellas que solo nos deja una opción posible, con lo que ya tenemos las fichas $\boxed{2 – 3}$ y $\boxed{4 – 8}$.

Esto, a su vez, anula 3 – 1, 3 – 6 y 3 – 8 así como 8 – 1, 8 – 3 y 8 – 7.

Esto nos da una ficha más, $\boxed{5 – 1}$ y anula 1 – 6.

La última ficha es la $\boxed{6 – 7}$.

19. Coloca los números del 1 al 8, sin repetir ninguno, dentro de cada uno de los sectores de la figura, de manera que la suma de dos sectores exteriores sea el número del sector interior.
¿Cuál es el valor de la suma de los cuatro sectores exteriores?

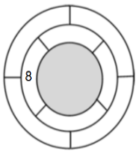


Solución

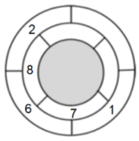
Dadas las características del enunciado:

- 8 debe estar en el interior dado que sumado a cualquier valor supera el máximo de 8
- 7 debe estar en el interior dado que sumado a sus valores de izquierda y derecha sumaría más de 8 con alguno de ellos.
- 1 y 2 deben estar en el exterior ya que no se pueden obtener como suma de dos números distintos del 3 al 8.

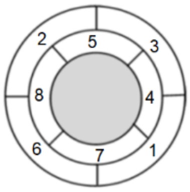
Fijamos por tanto el 8 en una posición del interior:



a) Si 8 se consigue con la suma de 2 y 6, entonces 7 debe estar junto al 8 para que sea la suma de 6 y 1:



La figura se completa con el 3 en el exterior y el 4 y 5 en el interior:



La combinación es válida y la suma de los cuatro sectores exteriores es: 1 + 2 + 3 + 6 = 12.

b) Si 8 se consigue con la suma de 3 y 5, como también están en el exterior 1 y 2 y deben estar uno al lado del otro, su suma (3) estaría en el sector interior que no es posible ya que 3 está en el exterior: