

1. Considérese la sucesión definida como $a_1 = 3$, y $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. Determinar las dos últimas cifras de a_{2025} .

Solución:

Calculamos varios términos de la sucesión teniendo en cuenta que $a_{n+1} = a_n (1 + a_n)$.

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3 \cdot 4 = 12$$

$$a_3 = 12 \cdot 13 = 156$$

$$a_4 = 156 \cdot 157 = 24492 \equiv 92 \pmod{100}$$

$$a_5 = 24492 \cdot 24493 = 599882556 \equiv 56 \pmod{100}$$

Parece que se van repitiendo las dos últimas cifras, siendo 56 si es un término impar de la sucesión y 92 si el término es par. Comprobemos:

- n impar. Si $a_n \equiv 56 \pmod{100}$, $a_n = 100a + 56 \rightarrow$

$$a_{n+1} = (100a + 56)(100a + 57) = 10000a^2 + 11300a + 3192 = 100d + 92 \equiv 92 \pmod{100}$$

- n par. Si $a_n \equiv 92 \pmod{100}$, $a_n = 100a + 92 \rightarrow$

$$a_{n+1} = (100a + 92)(100a + 93) = 10000a^2 + 18500a + 8556 = 100d + 56 \equiv 56 \pmod{100}$$

Por tanto $a_{2025} \equiv 56 \pmod{100}$.

2. Demostrar que para todo número n natural se verifica que $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.

Solución:

Primeramente trabajamos con potencias:

$$3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 3^2 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 2^{6n} = 9 \cdot (3^2)^n + 2 \cdot (2^6)^n = 9 \cdot 9^n + 2 \cdot 64^n$$

Y, utilizando congruencias, $64^n \equiv (-2)^n \equiv 9^n \pmod{11}$:

$$9 \cdot 9^n + 2 \cdot 64^n \equiv 9 \cdot 9^n + 2 \cdot 9^n = 11 \cdot 9^n \equiv 0 \pmod{11}.$$

3. Sobre un segmento AB de longitud $2a$, tomado como base, se construyen tres triángulos isósceles ACB, AC'B y AC''B, de alturas respectivas a , $2a$ y $3a$. Demostrar que los ángulos en C, C' y C'' suman 180° .

Solución:

$$\tan \alpha = \frac{a}{a} = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

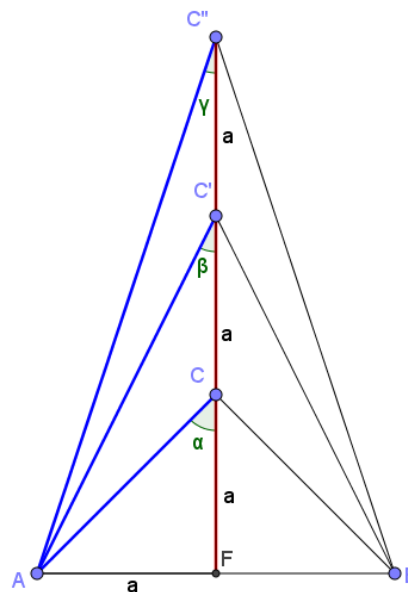
$$\tan \beta = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \quad \tan \gamma = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

$$\tan(\beta + \gamma) = \frac{\tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \cdot \tan \gamma} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

$$\rightarrow \beta + \gamma = 45^\circ$$

Por tanto, $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$,

luego $C + C' + C'' = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$



4. Demostrar que los números de la serie 16, 1156, 111556, 11115556, ... que se van obteniendo intercalando 15 entre las cifras centrales, son siempre cuadrados perfectos.

Solución:

$$a_1 = 16 = 4^2 \quad a_2 = 1156 = 34^2 \quad a_3 = 111556 = 334^2 \dots$$

$$a_n = \underbrace{1 \dots 1}_n \underbrace{5 \dots 5}_{n-1} 6 = \frac{1}{9}(10^n - 1)10^n + \frac{5}{9}(10^{n-1} - 1)10 + 6 = \frac{1}{9}(10^{2n} - 10^n + 5 \cdot 10^n - 50 + 54) =$$

$$= \frac{1}{9}(10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4) = \left(\frac{1}{3}(10^n + 2)\right)^2 \text{ siendo } (10^n + 2) \text{ siempre múltiplo de 3.}$$

5. Un número descompuesto en factores primos $n = a^x \cdot b^y \cdot c^z$ disminuye el número de sus divisores en 72, 48 y 54 al dividirlo por a , por b y por c respectivamente. Hallar el valor de los exponentes.

Solución:

El número de divisores de $n = a^x \cdot b^y \cdot c^z$ es $(x+1)(y+1)(z+1)$.

Así, el número de divisores de:

$$n/a \text{ es } x(y+1)(z+1)$$

$$n/b \text{ es } (x+1)y(z+1)$$

$$n/c \text{ es } (x+1)(y+1)z$$

Esto da lugar a las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) = x(y+1)(z+1) + 72 \\ (x+1)(y+1)(z+1) = (x+1)y(z+1) + 48 \\ (x+1)(y+1)(z+1) = (x+1)(y+1)z + 54 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (y+1)(z+1) = 72 = 2^3 \cdot 3^2 \\ (x+1)(z+1) = 48 = 2^4 \cdot 3 \quad (*) \\ (x+1)(y+1) = 54 = 2 \cdot 3^3 \end{cases}$$

Multiplicando las tres ecuaciones:

$$(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2 = 2^8 \cdot 3^6 \rightarrow (x+1)(y+1)(z+1) = 2^4 \cdot 3^3$$

Dividiendo esta expresión entre cada una de las tres de (*), obtendremos los exponentes:

$$\begin{cases} \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(y+1)(z+1)} = x+1 = \frac{2^4 \cdot 3^3}{2^3 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3 = 6 \\ \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(x+1)(z+1)} = y+1 = \frac{2^4 \cdot 3^3}{2^4 \cdot 3} = 3^2 = 9 \\ \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(x+1)(y+1)} = z+1 = \frac{2^4 \cdot 3^3}{2 \cdot 3^3} = 2^3 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 - 1 = 5 \\ y = 9 - 1 = 8 \\ z = 8 - 1 = 7 \end{cases}$$

6. Dada una circunferencia de radio R , considerar cuatro circunferencias iguales de radio r , tangentes interiormente a la dada y tangentes exteriores cada una de ellas con las otras. Expresar R en función de r . Hallar las áreas de los recintos que determinan.

Solución:

$$R = AB \text{ y } r = AB = AC$$

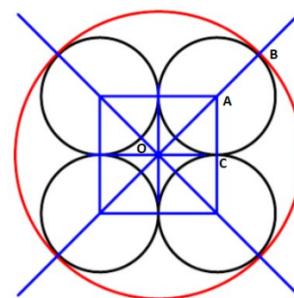
Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo OAC:

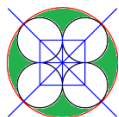
$$(R-r)^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 \rightarrow R-r = \sqrt{2}r \rightarrow$$

$$R = \sqrt{2}r + r = (\sqrt{2} + 1)r$$



$$A_{\text{central}} = (2r)^2 - \pi r^2 = (4 - \pi)r^2$$



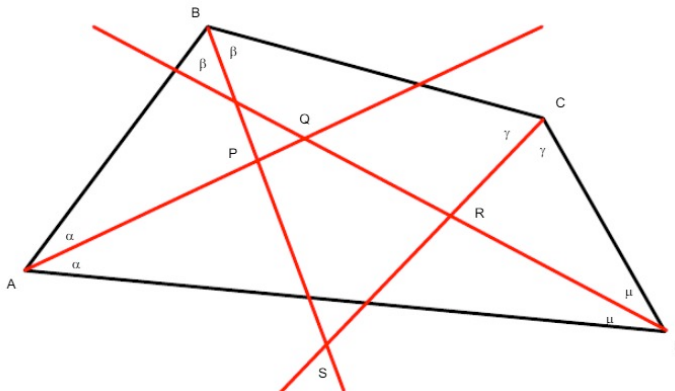


$$A_{\text{exterior}} = \pi R^2 - 4\pi r^2 - A_{\text{central}} = \pi((\sqrt{2} + 1)r)^2 - 4\pi r^2 - (4 - \pi)r^2 =$$

$$= \pi(3 + 2\sqrt{2})r^2 - 4\pi r^2 - (4 - \pi)r^2 = (3\pi + 2\sqrt{2}\pi - 4\pi - 4 + \pi)r^2 = (2\sqrt{2}\pi - 4)r^2$$

7. En un cuadrilátero arbitrario ABCD se trazan las bisectrices de los cuatro ángulos. Demostrar que los cuatro puntos de intersección de las bisectrices en A y C con las de B y D son cocíclicos (se encuentran sobre una misma circunferencia).

Solución:



Nombramos P, Q, S y R a los cuatro puntos de intersección de las bisectrices en A y C con las de B y D, respectivamente.

Así mismo sean los ángulos en cada vértice del cuadrilátero $A = 2\alpha$, $B = 2\beta$, $C = 2\gamma$ y $D = 2\mu$.

Uno de los criterios para determinar si cuatro puntos son cocíclicos es que los ángulos opuestos del cuadrilátero que forman sumen 180° (π radianes).

$$\angle PQR + \angle PSR = \angle AQD + \angle BSC = (\pi - \alpha - \mu) + (\pi - \beta - \gamma) = 2\pi - \alpha - \beta - \gamma - \mu$$

Dado que $\alpha + \beta + \gamma + \mu$ es la mitad de la suma de los ángulos del cuadrilátero inicial, suman π y, por tanto:

$$\angle PQR + \angle PSR = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \mu) = 2\pi - \pi = \pi$$

De igual manera $\angle SPQ + \angle SRQ = \pi$

8. De tres números $\{x, y, z\}$ se conoce su suma $S_1=25$, la suma de sus cuadrados $S_2=49$ y la suma de sus cubos $S_3=100$. Hallar el producto xyz .

Solución:

$$S_1^3 = (x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz =$$

$$= x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2(y + z) + 3y^2(x + z) + 3z^2(x + y) + 6xyz$$

Sumamos y restamos (para equilibrar) $3x^3 + 3y^3 + 3z^3$.

$$S_1^3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3x^3 - 3y^3 - 3z^3 + 3x^2(y + z) + 3x^3 + 3y^2(x + z) + 3y^3 + 3z^2(x + y) + 3z^3 + 6xyz =$$

$$= -2(x^3 + y^3 + z^3) + 3x^2(x + y + z) + 3y^2(x + y + z) + 3z^2(x + y + z) + 6xyz =$$

$$= -2(x^3 + y^3 + z^3) + 3(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x + y + z) + 6xyz =$$

$$= -2S_3 + 3S_2S_1 + 6xyz$$

$$\text{Por tanto: } xyz = \frac{S_1^3 + 2S_3 - 3S_2S_1}{6}$$

$$\text{Con los valores dados, } xyz = \frac{25^3 + 2 \cdot 100 - 3 \cdot 49 \cdot 25}{6} = \frac{12150}{6} = 2025$$

9. Sea AC la diagonal mayor del paralelogramo ABCD. Desde C se trazan las perpendiculares a las prolongaciones de AB y AD. Sean E y F los pies de estas perpendiculares. Demostrar que:

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$$

Solución:

Teniendo en cuenta que AEC y BEC son triángulos rectángulos, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AE^2 + EC^2 = AE^2 + BC^2 - BE^2 = AE^2 - BE^2 + BC^2 = \\ &= (AE + BE) \cdot (AE - BE) + BC^2 = (AE + BE) \cdot AB + BC^2 \end{aligned}$$

Al ser ABCD un paralelogramo, BC = AD.

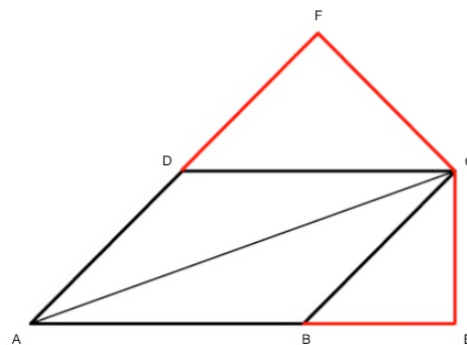
$$AC^2 = AE \cdot AB + BE \cdot AB + AD^2$$

Los triángulos BEC y DFC son semejantes dado que tienen un ángulo recto y $\angle EBC = \angle FDC$. Además, al ser ABCD un paralelogramo, BC = AD y DC = AB. Por tanto:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{DF}{DC} \rightarrow \frac{BE}{AD} = \frac{BE}{BC} = \frac{DF}{AB} \rightarrow BE \cdot AB = AD \cdot DF$$

Sustituyendo en la expresión de AC^2 :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AE \cdot AB + AD \cdot DF + AD^2 = AE \cdot AB + AD \cdot (DF + AD) = \\ &= AE \cdot AB + AD \cdot AF \end{aligned}$$



10. Se tienen tres bolsas, conteniendo n bolas numeradas por 1,2,3,...,n. Se extrae, al azar, una bola de cada bolsa; sean {x, y, z} los números de las bolas extraídas. Calcular la probabilidad de que $x + y = z$.

Solución:

Estudiemos todos los casos posibles y favorables.

x	y	z	Nº casos
n	-	-	0
n - 1	1	n	1
n - 2	1	n - 1	2
	2	n	
n - 3	1	n - 2	3
	2	n - 1	
	3	n	
...	...	...	...
1	1	2	n - 1
	2	3	
	3	4	
	...	...	
	n - 1	n	

El número de casos posibles es n^3 .

El número de casos favorables es la suma de los términos de una progresión aritmética.

$$\frac{(1 + (n - 1)) \cdot (n - 1)}{2} = \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

Aplicando la regla de Laplace:

$$p = \frac{\frac{n \cdot (n - 1)}{2}}{n^3} = \frac{n - 1}{2n^2}$$