12. ¿Cuál es el factorial más pequeño que es múltiplo de 3^{29}?

Solución:

Obviamente el factorial buscado, para ser el más pequeño, debe ser de un múltiplo de 3.
Veamos los factores 3 que tiene cada uno de los múltiplos de 3:

Múltiplo de 3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63
Potencia de 3	1	1	2	1	1	2	1	1	3	1	1	2	1	1	2	1	1	3	1	1	2

Para 60! se obtiene que es múltiplo de 3^{28} mientras que 63! es múltiplo de 3^{30}.
Por tanto, el factorial buscado es el de 63.

13. Sea N el menor entero positivo que al dividirlo entre 5 da resto 2, al dividirlo entre 7 da resto 3 y al dividirlo entre 9 da resto 4. ¿Cuál es el valor de N?

Solución:

Nos fijamos en que los restos de las tres divisiones son *0,5* unidades menor que el número por el que se está dividiendo.
Así: $N + 0{,}5$ al dividirlo entre *5* da resto *2,5*; al dividirlo entre *7* da resto *3,5* y al dividirlo entre *9* da resto *4,5*.
Por tanto, $2N + 1$ es múltiplo de *5, 7* y *9*.
Esto quiere decir que $2N + 1 = 5 \cdot 7 \cdot 9 = 315 \Rightarrow 2N = 315 - 1 = 314 \Rightarrow N = \frac{314}{2} = 157$

14. Si $a = \sqrt{30 - \sqrt{30 - \sqrt{30 - \ldots}}}$ y $b = 6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}$, ¿cuál es el valor de ab?

Solución:

$$a^2 = 30 - \sqrt{30 - \sqrt{30 - \ldots}} \Rightarrow a^2 = 30 - a \Rightarrow a^2 + a - 30 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2} = \begin{cases} 5 \\ -6 \end{cases}$$

La solución válida es $a = 5$.
Por otra parte:

$$b = 6 + \sqrt{b} \Rightarrow b - 6 = \sqrt{b} \Rightarrow b^2 - 12b + 36 = b \Rightarrow b^2 - 13b + 36 = 0 \Rightarrow$$

$$b = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$$

La solución válida es $b = 9$.
Por tanto: $a \cdot b = 5 \cdot 9 = 45$.

15. Al dividir el polinomio $P(x)$ entre $(x-19)$, obtenemos de resto 99 y cuando lo dividimos entre $(x-99)$ obtenemos de resto 19. ¿Cuál es el resto de la división de $P(x)$ entre $(x-19)\cdot(x-99)$?

Solución:

Si al dividir el polinomio $P(x)$ entre $(x-19)$, obtenemos de resto 99: $P(19) = 99$.
Si al dividir el polinomio $P(x)$ entre $(x-99)$, obtenemos de resto 19: $P(99) = 19$.
Al dividir $P(x)$ entre $(x-19)\cdot(x-99)$, obtenemos un cociente $Q(x)$ y un resto $(Ax+B)$:

$$P(x) = Q(x)\cdot(x-19)\cdot(x-99) + Ax + B$$

Al utilizar los dos datos dados:

$$P(19) = Q(19)\cdot(19-19)\cdot(19-99) + 19A + B = 99 \Rightarrow B = 99 - 19A$$
$$P(99) = Q(99)\cdot(99-19)\cdot(99-99) + 99A + B = 19 \Rightarrow B = 19 - 99A$$

Resolviendo el sistema por el método de igualación:

$$99 - 19A = 19 - 99A \Rightarrow 80A = -80 \Rightarrow A = -1$$

Por tanto:

$$B = 99 - 19(-1) = 99 + 19 = 118$$

El resto de la división es: $Ax + B = -x + 118$.

16. Dos de los ángulos de un triángulo, inscrito en una circunferencia de radio 6, valen 15º y 60º. ¿Cuál es el área del triángulo?

Solución:

Utilizando el teorema del seno:

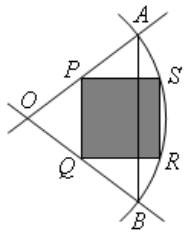
$$\frac{a}{sen15^\circ} = \frac{b}{sen60^\circ} = \frac{c}{sen105^\circ} = 2R = 2\cdot 6 = 12 \Rightarrow \begin{cases} a = 12\,sen15^\circ \\ b = 12\,sen60^\circ \\ c = 12\,sen105^\circ = 12\,sen75^\circ = 12\cos 15^\circ \end{cases}$$

El área de un triángulo en función de sus tres lados:

$$Área = \frac{abc}{4R} = \frac{12\,sen15^\circ\cdot 12\,sen60^\circ\cdot 12\cos 15^\circ}{4\cdot 6} = 36\left(2\,sen15^\circ\cos 15^\circ\right)sen60^\circ =$$

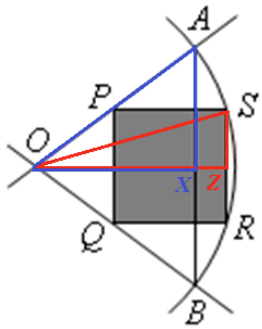
$$= 36\left(2\,sen15^\circ\cos 15^\circ\right)sen60^\circ = 36\,sen30^\circ\,sen60^\circ = 36\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\,u^2$$

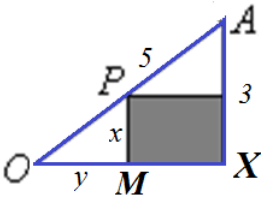
17. Sea AB una cuerda de longitud 6 cm en una circunferencia de centro O y radio 5 cm. Inscribimos en el sector circular OAB un cuadrado con lado paralelo a AB, tal y como se ve en la figura. ¿Cuál es, en cm^2, el área del cuadrado?



Solución:

Vamos a considerar los triángulos *OAX* y *OSZ*:





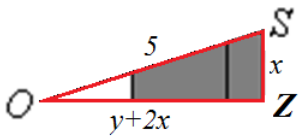
Aplicando el teorema de Pitágoras sobre *OAX*:

$$OA^2 = AX^2 + OX^2 \Rightarrow 25 = 5^2 = 3^2 + OX^2 = 9 + OX^2 \Rightarrow$$

$$OX^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow OX = 4$$

Dada la semejanza de los triángulos *OMP* y *OXA*:

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow \quad y = \frac{4}{3}x$$

Aplicando el teorema 

de Pitágoras sobre *OSZ*:

$$OS^2 = SZ^2 + OZ^2 \Rightarrow$$

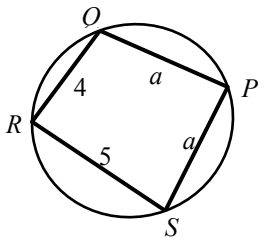
$$25 = 5^2 = x^2 + (y + 2x)^2 \Rightarrow$$

$$25 = x^2 + \left(\frac{4x}{3} + 2x\right)^2 = x^2 + \left(\frac{10x}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{100x^2}{9} = \frac{109x^2}{9} \Rightarrow$$

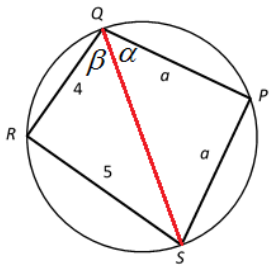
$$109x^2 = 25 \cdot 9 = 225 \Rightarrow x^2 = \frac{225}{109}$$

El cuadrado tiene lado *2x*, así que el área es $(2x)^2 = 4x^2 = 4 \cdot \frac{225}{109} = \frac{900}{109}\ \text{cm}^2$

18. El cuadrilátero *PQRS* de la figura está inscrito en una circunferencia, tiene ángulos rectos en *P* y en *R*, dos de sus lados son iguales y los otros dos miden 4 y 5 cm. ¿Cuánto mide la tangente de su ángulo en *Q*?



Solución:



Por una parte $\alpha = 45^\circ$ por ser el triángulo *QPS* rectángulo e isósceles.

Así: $\tan\alpha = 1$.

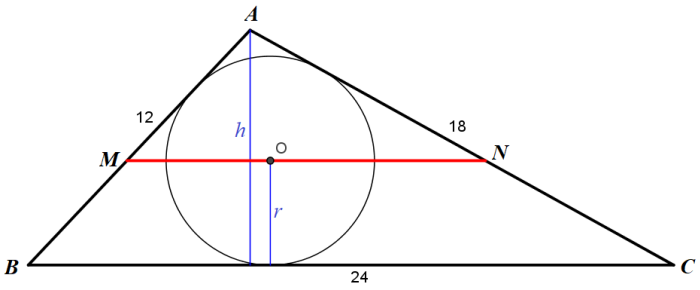
Por otra, $\tan\beta = \frac{5}{4}$ en el triángulo rectángulo *QRS*.

La tangente del ángulo solicitado vale:

$$\tan Q = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{1 + 5/4}{1 - 1 \cdot 5/4} = \frac{9/4}{-1/4} = -9$$

19. En un triángulo *ABC*, las longitudes de los lados *AB*, *BC* y *AC* son 12, 24 y 18, respectivamente. La recta que pasa por su incentro y es paralela al lado *BC*, corta al lado *AB* en el punto *M* y al lado *AC* en el punto *N*. ¿Cuál es el perímetro del triángulo *AMN*?

Solución:



Perímetro: $P = 12 + 24 + 18 = 54$.

El área, considerando como base BC y altura h: Área $= \dfrac{24 \cdot h}{2} = 12h$

El área también es: Área $= \dfrac{perímetro \cdot apotema}{2} = \dfrac{54 \cdot r}{2} = 27r$

Igualando ambas áreas: $12h = 27r \Rightarrow h = \dfrac{27r}{12} = \dfrac{9r}{4} \Rightarrow h - r = \dfrac{9r}{4} - r = \dfrac{5r}{4}$

La proporción entre h y $h–r$ nos da la proporción entre los perímetros de ABC (P) y AMN (p).

$$\frac{h}{h-r} = \frac{P}{p} \Rightarrow \frac{9r/4}{5r/4} = \frac{9}{5} = \frac{54}{p} \Rightarrow p = \frac{54 \cdot 5}{9} = 30$$

20. ¿Cuál es el valor de la suma $\dfrac{1}{\log_2 100!} + \dfrac{1}{\log_3 100!} + \dfrac{1}{\log_4 100!} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{100} 100!}$?

Solución:

Teniendo en cuenta que: $\dfrac{1}{\log_a b} = \log_b a$:

$$\frac{1}{\log_2 100!} + \frac{1}{\log_3 100!} + \frac{1}{\log_4 100!} + \ldots + \frac{1}{\log_{100} 100!} = \log_{100!} 2 + \log_{100!} 3 + \log_{100!} 4 + \ldots + \log_{100!} 100 =$$

$$= \log_{100!}(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100) = \log_{100!}(100!) = 1$$

21. Al lanzar un dado, con sus caras numeradas del 1 al 6, tres veces consecutivas, resulta que el número obtenido en el tercer lanzamiento es igual a la suma de los números obtenidos en los dos primeros lanzamientos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número 2 no haya aparecido en ninguno de los tres lanzamientos?

Solución:

Siendo el resultado de los tres lanzamientos a, b, $a+b$, hay los siguientes casos:

112, 123 - 213, 134 - 314, 145 - 415, 156 - 516,
224, 235 - 325, 246 - 426 y 336.

De los 15 casos posibles, solo 7 son favorables (marcados en rojo).

Por la regla de Laplace, la probabilidad solicitada es: $p = \dfrac{7}{15}$

22. Si $f(11) = 11$ y $f(n+3) = \dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$, calcular $f(2024)$.

Solución:

Dado que $f(11)=11$: $f(14)=\dfrac{f(11)-1}{f(11)+1}=\dfrac{11-1}{11+1}=\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{6}$

$$f(17)=\frac{f(14)-1}{f(14)+1}=\frac{\frac{5}{6}-1}{\frac{5}{6}+1}=\frac{\frac{-1}{6}}{\frac{11}{6}}=\frac{-1}{11}$$

$$f(20)=\frac{f(17)-1}{f(17)+1}=\frac{\frac{-1}{11}-1}{\frac{-1}{11}+1}=\frac{\frac{-12}{11}}{\frac{10}{11}}=\frac{-12}{10}=\frac{-6}{5}$$

$$f(23)=\frac{f(20)-1}{f(20)+1}=\frac{\frac{-6}{5}-1}{\frac{-6}{5}+1}=\frac{\frac{-11}{6}}{\frac{-1}{6}}=11$$

$f(23)=f(11)$. Cada 12 unidades se repite el resultado.

Por tanto:

$$f(2024)=f(12\cdot 168+8)=f(12\cdot 167+20)=f(20)=\frac{-6}{5}$$

23. Al sumar los enteros desde el *1* hasta *n*, ha habido uno que, por error, hemos sumado dos veces. Si la suma obtenida ha sido *2025*, ¿cuál es el número que hemos repetido?

Solución:

La suma de los números de *1* a *n* es: $\dfrac{(1+n)\cdot n}{2}<2025 \Rightarrow (1+n)\cdot n=n+n^2<4050 \Rightarrow$

$n^2<4050 \Rightarrow n<\sqrt{4050}=63{,}64 \Rightarrow n\leq 63$

Para $n=63$, la suma de todos los enteros de *1* a *63* es: $\dfrac{64\cdot 63}{2}=2016$

Como la suma ha sido *2025* y uno de ellos se ha sumado dos veces, *2025 – 2016 = 9* que es el número que se ha repetido.