Seminario de problemas Curso 2022-23. Hoja 2

Decimos que dos números enteros a y b son *congruentes módulo* n, y escribimos

$$a \equiv b \mod n,$$

si a y b dejan el mismo resto al dividirlos por n.

Si $a \equiv c \mod n$ y $b \equiv d \mod n$ entonces

$$\begin{aligned} a + b &\equiv c + d \mod n \\ a - b &\equiv c - d \mod n \\ a \times b &\equiv c \times d \mod n \end{aligned}$$

- Sea p un número primo y n un entero no divisible por p. Si para dos enteros a y b se cumple $na \equiv nb \mod p$ entonces $a \equiv b \mod p$.
- Sea p un número primo y a un entero no divisible por p entonces $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
- Sea p un número primo y a un entero cualquiera entonces $a^p \equiv a \mod p$.
- Si $a \equiv b \mod n$ entonces $a - b$ es divisible por n y $a = kn + b$ para algún entero k.
- Si p es un primo y p divide al producto ab entonces o a es divisible por p o b es divisible por p.

8. Prueba que $2^n + 6 \cdot 9^n$ es múltiplo de 7 para todo entero $n \geq 0$.

Solución.

Basta considerar la expresión módulo 7. Puesto que $9 \equiv 2 \mod 7$ entonces

$$2^n + 6 \cdot 9^n \equiv 2^n + 6 \cdot 2^n \equiv 7 \cdot 2^n \equiv 0 \mod 7.$$

Podríamos haber procedido por inducción. De hecho, para $n = 0$ es evidente que $2^0 + 6 \cdot 9^0$ es múltiplo de 7. Supongamos que para $n = k$ se cumple que $2^k + 6 \cdot 9^k$ es múltiplo de 7. Queremos ver que entonces también es múltiplo de 7 la expresión $2^{k+1} + 6 \cdot 9^{k+1}$. Ahora bien

$$2^{k+1} + 6 \cdot 9^{k+1} = 2 \cdot 2^k + 6 \cdot 9 \cdot 9^k = 2(2^k + 6 \cdot 9^k) + 42 \cdot 9^k.$$

Como hemos supuesto que $2^k + 6 \cdot 9^k$ es múltiplo de 7 y 42 es múltiplo de 7, $2^{k+1} + 6 \cdot 9^{k+1}$ es múltiplo de 7. Luego $2^n + 6 \cdot 9^n$ es múltiplo de 7 para todo $n \geq 0$.

9. Prueba que si $a \equiv b \mod 3$ entonces $\frac{2}{3}(a^2 + ab + b^2)$ se puede escribir como la suma de tres cuadrados.

Solución.

Puesto que $a \equiv b \mod 3$, entonces existe k tal que $a = 3k + b$. Por tanto

$$\frac{2}{3}(a^2 + ab + b^2) = \frac{2}{3}((b + 3k)^2 + (3k + b)b + b^2) = 2(b^2 + 3kb + 3k^2).$$

Agrupando convenientemente, resulta

$$2(b^2 + 3kb + 3k^2) = (b^2 + 2kb + k^2) + (b^2 + 4kb + 4k^2) + k^2 = (b + k)^2 + (b + 2k)^2 + k^2.$$

Es decir, la suma de tres cuadrados.

10. Encuentra el resto de dividir 2^{100} por 101. ¿Cuál sería el de dividir 3^{102} por 101?

Solución.

Teniendo en cuenta que 101 es un número primo, entonces $2^{100} \equiv 1 \mod 101$, es decir el resto de la división es 1.

Para la segunda pregunta, como $3^{100} \equiv 1 \mod 101$, entonces $3^{102} = 9 \cdot 3^{100} \equiv 9 \mod 101$ y el resto de la división es 9.

11. Si n no es divisible por 17 prueba que entonces o bien $n^8 - 1$ o $n^8 + 1$ es divisible por 17.

Solución.

Como 17 es un número primo, se tiene

$$(n^8 - 1)(n^8 + 1) = n^{16} - 1 \equiv 0 \mod 17$$

y entonces $(n^8 - 1)(n^8 + 1)$ es múltiplo de 17. Por lo tanto, uno de los dos factores es divisible por 17.

12. Prueba que $300^{3000} - 1$ es divisible por 1001 y que $7^{120} - 1$ es divisible por 143.

Solución.

Si un número es divisible por los primos $p_1, p_2 \ldots, p_k$, entonces lo es también por su producto. Como $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, si vemos que $300^{3000} - 1$ es divisible por 7, 11 y 13, entonces lo será por 1001. Ahora bien

$$300^6 \equiv 1 \mod 7, \quad 300^{10} \equiv 1 \mod 11, \quad 300^{12} \equiv 1 \mod 13.$$

Teniendo esto en cuenta, resulta

$$300^{3000} \equiv 1 \mod 7, \quad 300^{3000} \equiv 1 \mod 11, \quad 300^{3000} \equiv 1 \mod 13.$$

por lo que $300^{3000} - 1$ es divisible por 1001.

La segunda parte del problema se hace de manera análoga, teniendo en cuenta ahora que $143 = 11 \cdot 13$ y entonces

$$7^{10} \equiv 1 \mod 11, \quad 7^{12} \equiv 1 \mod 13.$$

Por tanto

$$7^{120} \equiv 1 \mod 11, \quad 7^{120} \equiv 1 \mod 13$$

y $7^{120} - 1$ es múltiplo de 143.

13. Si $a+b+c$ es divisible por 30, prueba que también $a^5+b^5+c^5$ es divisible por 30.

Solución.

Teniendo en cuenta que para p primo $a^p \equiv a \mod p$, y dado que $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, resulta

$$\begin{aligned}
&a^2 \equiv a \mod 2 \Rightarrow a^5 = a^2 \cdot a^2 \cdot a \equiv a \cdot a \cdot a = a^2 \cdot a \equiv a \cdot a = a^2 \equiv a \mod 2\\
&a^3 \equiv a \mod 3 \Rightarrow a^5 = a^2 \cdot a^3 \equiv a^2 \cdot a = a^3 \equiv a \mod 3\\
&a^5 \equiv a \mod 5.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$a^5+b^5+c^5 \equiv a+b+c \mod 2, \quad \mod 3, \quad \mod 5.$$

Es decir $a^5+b^5+c^5 \equiv a+b+c \mod 30$ y entonces $a^5+b^5+c^5$ es divisible por 30.

14. ¿Puede ser alguno de los números 11, 111, 1111, 11111, ..., la potencia quinta de algún número natural?

Solución.

Notemos que los números 11, 111, 1111, ... se pueden escribir como

$$\frac{10^n-1}{9}, \quad n \geq 2.$$

Entonces, si alguno de ellos es una potencia quinta, existirá un número natural a tal que

$$\frac{10^n-1}{9} = a^5,$$

por lo que $10^n - 1 = 9 \cdot a^5$. Tomando congruencias módulo 5, resulta

$$-1 \equiv -a^5 \mod 5 \Rightarrow a^5 \equiv 1 \mod 5 \Rightarrow a \equiv 1 \mod 5.$$

Por tanto $a = 5k+1$, para algún entero k, y entonces

$$10^n - 1 = 9 \cdot (5k+1)^5 = 9 \cdot (5^5k^5 + 5 \cdot 5^4k^4 + 10 \cdot 5^3k^3 + 10 \cdot 5^2k^2 + 5 \cdot 5k + 1).$$

Tomando ahora congruencias módulo 25, y puesto que $n \geq 2$, se tiene

$$-1 \equiv 9 \mod 25,$$

lo cual es imposible. Es decir, ningún número formado solo por unos puede ser una potencia quinta.

15. Si p es un primo distinto de 3, prueba que el número $11\cdots11$ (p unos) no es divisible por p. Si, además, $p > 5$ entonces $11\cdots11$ ($p-1$ unos) es divisible por p.

Solución.

Supongamos que $11\cdots11$ (p unos) es divisible por p. Entonces

$$\frac{10^p-1}{9} \equiv 0 \mod p, \quad p \neq 3,$$

por lo que $10^p - 1 \equiv 0 \pmod p$. Ahora bien, $10^p \equiv 10 \pmod p$, por lo que $9 \equiv 0 \pmod p$. Puesto que $p \neq 3$, esto es imposible, lo que prueba que $11 \cdots 11$ (p unos) no es divisible por p.

En el caso de que el número de unos sea $p-1$, entonces

$$11 \cdots 11 = \frac{10^{p-1} - 1}{9}$$

y, como $p > 5$, se tiene que $10^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p$, de donde se deduce que el número es divisible por p.

16. Si N y N^2 terminan en la misma secuencia de cuatro dígitos $abcd$ y $a \neq 0$, ¿cuáles son estos cuatro dígitos?

Solución.

Restando N^2 y N tenemos que

$$N^2 - N = N(N-1) \equiv 0 \pmod{10000}.$$

Es decir, $N(N-1)$ es divisible por $2^4 \cdot 5^4$. Puesto que N y $N-1$ tienen distinta paridad, uno de ellos es divisible por 2^4 y el otro por 5^4. Nótese que el caso en que alguno de ellos sea divisible por $2^4 \cdot 5^4$ querría decir que o bien N o bien $N-1$ terminan en 4 ceros, por lo que, en cualquier caso, $a = 0$, dando lugar a una solución no válida.

Supongamos que N es divisible por 625, es decir $N \equiv 0 \pmod{625}$. Entonces, podemos ver que, como $625 \equiv 1 \pmod{16}$, las últimas cuatro cifras del número serían 0625, lo que da $a = 0$ y es una solución no válida. Por lo tanto, $N - 1 \equiv 0 \pmod{625}$ y $N \equiv 0 \pmod{16}$. Teniendo esto en cuenta, vemos que $N - 1 \equiv 15 \pmod{16}$ y, dado que $625 \equiv 1 \pmod{16}$, el número buscado es

$$N = 15 \cdot 625 + 1 = 9376.$$

17. Prueba que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $2^n + 3^n$ no puede ser nunca un cubo.

Solución.

Veamos los primeros casos

$$\begin{array}{rcr} n=1 & \to & 5 \\ n=2 & \to & 13 \\ n=3 & \to & 35 \\ n=4 & \to & 97 \end{array}$$

donde se aprecia que no hay ningún cubo. La idea es buscar un módulo adecuado y tomar congruencias. Podemos pensar en 2 y 3, o sus potencias, como módulos. En este caso vamos a considerar congruencias módulo 9, de donde tenemos que

$$2^n + 3^n \equiv 2^n \pmod 9.$$

Pero, para $n \geq 1$ resulta que

$$2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^3 \equiv -1, \quad 2^4 \equiv -2, \quad 2^5 \equiv -4, \quad 2^6 \equiv 1 \pmod 9.$$

Por otra parte, cualquier número N es de la forma $N = 3k + r$ con $r = 0, 1, 2$, por lo que

$$N^3 = (3k + r)^3 = 27k^3 + 27k^2 r + 9kr^2 + r^3 \equiv r^3 \pmod 9,$$

con $r^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod 9$, ya que $r = 0, 1, 2$. Teniendo en cuanta todo lo anterior, es evidente que si $2^n + 3^n$ es un cubo entonces n es un múltiplo de 3, es decir de la forma $n = 3k$. Así pues,

$$2^n + 3^n = 2^{3k} + 3^{3k}.$$

No es difícil ver que

$$\left(3^k\right)^3 < 2^{3k} + 3^{3k} < \left(3^k + 1\right)^3.$$

En eefecto, la primera desigualdad es trivial y, para probar la segunda, basta ver que

$$2^{3k} + 3^{3k} = \left(2^3\right)^2 + 3^{3k} < \left(3^2\right)^2 + 3^{3k} = 3^{3k} + 3^{2k} < 3^{3k} + 3 \cdot 3^{2k} + 3 \cdot 3^k + 1 = \left(3^k + 1\right)^3.$$

Por lo tanto, $2^{3k} + 3^{3k}$ se encuentra entre dos cubos consecutivos y entonces no puede ser un cubo.