Seminario de problemas Curso 2021-22. Hoja 2

15. ¿De cuántas maneras distintas se puede trazar un camino que dé lugar a la palabra MATEMATICAS en el siguiente triángulo de letras?

```
                    M
                  M A M
                M A T A M
              M A T E T A M
            M A T E M E T A M
          M A T E M A M E T A M
        M A T E M A T A M E T A M
      M A T E M A T I T A M E T A M
    M A T E M A T I C I T A M E T A M
  M A T E M A T I C A C I T A M E T A M
M A T E M A T I C A S A C I T A M E T A M
```

Solución.

Contaremos de cuántas maneras puede llegarse desde la única S hasta una de las M en el exterior del triángulo de letras. Como hay simetría, contaremos la manera de llegar a una de las M de la parte izquierda y, luego, multiplicaremos por 2.

Partiendo de S, podemos ir a 2 A

```
                    M
                  M A
                M A T
              M A T E
            M A T E M
          M A T E M A
        M A T E M A T
      M A T E M A T I
    M A T E M A T I C
  M A T E M A T I C A
M A T E M A T I C A S
```

De cada A a 2 C, y así sucesivamente. Por tanto hay 2^{10} formas de llegar hasta una M de la parte izquierda. Si multiplicamos por 2, habría 2^{11} formas de llegar a una de las M exteriores. Ahora bien, la palabra que se forma subiendo verticalmente hasta el vértice está contada dos veces. Por tanto, el total es $2^{11} - 1 = 2047$.

16. Un conjunto de dos millones de puntos está completamente contenido en un círculo de radio R. ¿Existe alguna recta que deje exactamente a cada lado de ella un millón de puntos?

Solución.

Consideremos el conjunto de todas las rectas que unen los 2 millones de puntos dos a dos. A continuación, tomamos un punto P exterior al círculo de radio R que no pertenezca a ninguna de estas rectas. Ahora, trazamos una recta que pasa por P, que sea exterior al círculo, y la vamos girando, en sentido antihorario, barriendo el disco. En este proceso de barrido, los puntos los vamos encontrando de uno en uno (de otro modo tendríamos al menos 2 puntos del círculo, junto con P, en una misma recta. Pero eso no es posible por la elección que hemos hecho de P). Cuando hayamos llegado al punto 1 000 000, giramos lo suficiente para no encontrar al siguiente punto y ya tenemos la recta pedida.

17. a) ¿A qué es igual la suma $1+3+5+\cdots+(2n-1)$?

b) Prueba que $n^n > 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)$.

Solución.

El apartado a) se puede resolver usando inducción. Sea $a_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$. Vemos que

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 16,$$

por lo que inferimos que $a_n = n^2$. Para probarlo, vamos a ver que si $a_n = n^2$ entonces $a_{n+1} = (n+1)^2$. Ahora bien

$$a_{n+1} = 1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1) = a_n + (2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2.$$

Para resolver el apartado b) hacemos uso de la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica. Dados n números positivos, a_1, a_2, …, a_n, no necesariamente distintos, entonces

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n},$$

con igualdad si todos los a_j son iguales.

En nuestro caso tomamos la desigualdad de los n primeros números impares, por lo que

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n} > \sqrt[n]{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}.$$

Teniendo en cuenta a), la parte izquierda de la desigualdad es igual a n. Elevando a la n-ésima potencia

$$n^n > 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1).$$

18. Si m y n son números naturales y $n>2$, prueba que 2^m+1 nunca puede ser divisible por 2^n-1.

Solución.

Haciendo la división entre los dos números, resulta

$$2^m+1 = 2^{m-n}(2^n-1)+2^{m-n}+1,$$

por lo que

$$\frac{2^m+1}{2^n-1} = 2^{m-n} + \frac{2^{m-n}+1}{2^n-1}.$$

Así, 2^m+1 es divisible por 2^n-1 si lo es también $2^{m-n}+1$. Pero, éste es un número de la misma forma, por lo que la división es exacta solo si existen m y n tales que $2^m+1 = 2^n-1$. Pero esto no es posible si $n > 3$. en efecto, restando ambas expresiones, se tiene

$$2^m - 2^n + 2 = 0 \Rightarrow 2^{m-1} - 2^{n-1} + 1 = 0.$$

La igualdad anterior solo se podrá cumplir si $m < n$. En este caso

$$2^{m-1} - 2^{n-1} + 1 = 2^{m-1}(1 - 2^{n-m}) + 1 = 0.$$

De aquí se deduce que $2^{m-1}(1-2^{n-m}) = -1$. Es decir $2^{m-1} = 1$ y $2^{n-m} = 2$, por lo que $m = 1$ y $n = 2$, lo que contradice que $n > 2$.

19. La sucesión de números enteros $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisface que $a_{n+1} = a_n^2 + 8084$ para $n \geq 1$. Demuestra que existe como mucho un n para el que a_n es un cubo perfecto.

Solución.

La idea es trabajar con congruencias módulo 9 (es decir considerar solo los restos al dividir por 9), ya que los cubos solo son congruente con 0 o ± 1, módulo 9.

Sea a_k el primer cubo de la sucesión. Entonces, a partir de aquí, tenemos que si $a_k \equiv 0$ módulo 9, entonces

$$a_{k+1} \equiv 2, \quad a_{k+2} \equiv 6, \quad a_{k+3} \equiv 2 \quad \cdots$$

Es decir ya no hay ningún término de la sucesión que sea un cubo, pues los restos al dividir por 9 serán 2 o 6, por lo que no pueden ser cubos.

Análogamente, si $a_k \equiv \pm 1$ módulo 9, entonces

$$a_{k+1} \equiv 3, \quad a_{k+2} \equiv 2, \quad a_{k+3} \equiv 6 \quad \cdots$$

y tampoco hay más cubos.

20. Un rectángulo $a \times b$ *cabe en* un rectángulo $c \times d$ si, o bien $a \leq c$ y $b \leq d$, o bien $a \leq d$ y $b \leq c$. Por ejemplo, un rectángulo 1×5 cabe en un rectángulo 6×2. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de 2021 rectángulos cuyos lados son todos ellos números enteros entre 1 y 2020 inclusive. Prueba que hay tres rectángulos A, B y C en $\mathcal{S}$ tales que A cabe en B y B cabe en C.

Solución.

Vamos a probar por inducción en n el enunciado general siguiente: Para todo $n \geq 2$, si $\mathcal{S}$ es un conjunto de $n+1$ rectángulos cuyos lados son todos ellos números enteros entre 1 y n inclusive, hay tres rectángulos A, B y C en $\mathcal{S}$ tales que A cabe en B y B cabe en C.

Denotaremos a continuación siempre por (a, b) un rectángulo $a \times b$ o $b \times a$ con $a \leq b$.

Caso inicial $n = 2$: solamente hay 3 tipos de rectángulos diferentes cuyos lados son enteros entre 1 y 2, a saber, los rectángulos como $(1,1)$, como $(1,2)$ o como $(2,2)$. Vamos a repartir estos tres tipos de rectángulo en dos columnas C_1 y C_2 como se indica en el diagrama siguiente:

C_1	C_2
$(1,1)$	$(1,2)$
	$(2,2)$

Siempre que nos den $3(= 2+1)$ rectángulos con lados enteros entre 1 y 2 (de tipos posiblemente repetidos), por el **principio del palomar** siempre habrá dos cuyo tipo pertenece a una de las columnas. El “peor caso” es cuando los tres rectángulos son uno de cada tipo, pero como $(1,1)$ cabe en $(1,2)$ y $(1,2)$ cabe en $(2,2)$, en cualquiera de los 10 casos posibles se cumple el enunciado, los tres rectángulos A, B y C tales que A cabe en B y B cabe en C (vamos a decir abreviadamente que forman un *trío encajado*) son los tres rectángulos que nos han dado. Así que para $n = 2$ el enunciado es cierto.

Suponiendo que, dado un $n \geq 3$, el enunciado es cierto para todo k tal que $2 \leq k \leq n-1$, probaremos el enunciado para n. Hay $CR_{n,2} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$ tipos posibles de rectángulos diferentes con los lados enteros entre 1 y n, que podemos repartir en la disposición triangular de n columnas C_1, C_2, $\ldots$, C_n que sigue, donde los tipos (i,j) están en la columna C_j en el orden de i creciente:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	$\cdots$	C_{n-1}	C_n
$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$\cdots$	$(1,n-1)$	$(1,n)$
	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$	$\cdots$	$(2,n-1)$	$(2,n)$
		$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$	$\cdots$	$(3,n-1)$	$(3,n)$
			$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$	$\cdots$	$(4,n-1)$	$(4,n)$
				$(5,5)$	$(5,6)$	$\cdots$	$(5,n-1)$	$(5,n)$
					$(6,6)$	$\cdots$	$(6,n-1)$	$(6,n)$
						$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
						$\cdots$	$(n-1,n-1)$	$(n-1,n)$
						$\cdots$		(n,n)

Ahora nos dan un conjunto $\mathcal{S}$ de $n+1$ rectángulos cuyos lados son todos ellos números enteros entre 1 y n inclusive. Si ninguno, o solamente uno, de los rectángulos de $\mathcal{S}$ pertenecen a tipos incluidos en la última columna C_n, entonces al menos n de los rectángulos de $\mathcal{S}$ tienen sus lados enteros entre 1 y $n-1$, y la conclusión se sigue por la hipótesis de inducción para $k = n-1$. Si tres de los rectángulos de $\mathcal{S}$ pertenecen a tipos incluidos en la columna C_n, entonces la conclusión se sigue obviamente, porque esos tres rectángulos formarán un trío encajado.

Queda por estudiar sólo el caso en que exactamente dos de los rectángulos de $\mathcal{S}$ corresponden a tipos incluidos en la columna C_n. Supongamos que pertenezcan a los tipos (j,n) y (k,n), con $j \leq k$ y $1 \leq j \leq n-3$ (en la tabla anterior hemos coloreado la posibilidad $j = 1$, $k = 4$). Si alguno de los $n-2$ rectángulos restantes es de tipo (r,s) con $1 \leq r \leq j$, ese rectángulo (de color verde) forma un trío encajado con los dos primeros (de color rojo). Si no, los $n-2$ rectángulos restantes tienen lados enteros comprendidos entre $j+1$ y $n-1 = j+(n-j-1)$, y la conclusión resulta de la hipótesis de inducción para $k = n-1-j$. Los tres rectángulos A, B y C que formarán un trío encajado estarán entre los $n-2$ rectángulos restantes (de tipos que quedan sin colorear). Finalmente en el caso de ser $j \geq n-2$, se puede aplicar, para los $n-2$ rectángulos restantes, inducción con $k = n-1$.

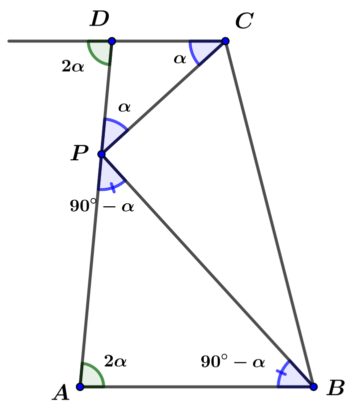
21. Sea $ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $AB + CD = AD$. Sea P el punto en AD tal que $AP = AB$ y $PD = CD$.

a) Prueba que $\angle BPC = 90°$.

b) Sean Q el punto medio de BC y R el otro punto de intersección del segmento AD con la circunferencia circunscrita al triángulo ABQ. Prueba que los puntos B, P, R y C son concíclicos (están sobre la misma circunferencia).

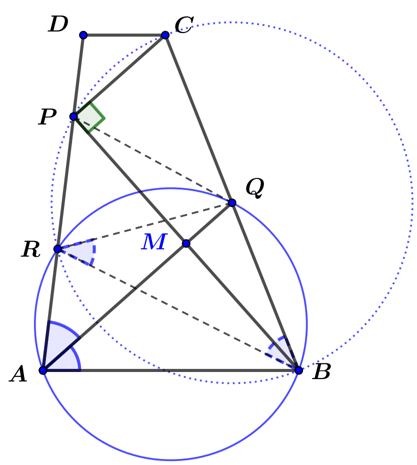
Solución.

a) De acuerdo con el enunciado, los triángulos ABP y DPC son isósceles y por tanto, si $\angle BAP = 2\alpha$, entonces $\angle APB = 90° - \alpha$ y $\angle CPD = \alpha$ (ver la figura).



Luego $\angle BPC = 180° - (\alpha + 90° - \alpha) = 90°$, como se quería probar.

b) Como $\angle BPC = 90°$, el punto Q es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos B, C y P de la que BC es un diámetro. Por tanto $QP = QB$, así que el triángulo QPB es isósceles.



Si M es el punto medio de PB, la recta QM, que es la mediatriz del segmento PB, pasa también por el punto A ya que $AP = AB$. De aquí se deduce que la recta AM es la bisectriz del ángulo PAB interior del triángulo isósceles PAB y, por tanto, que $\angle BAQ = \angle QAR = \alpha$.

Como el cuadrilátero $ABQR$ es cíclico, se tiene

$$\angle QRB = \angle QAB = \alpha \quad \text{y también} \quad \angle QBR = \angle QAR = \alpha.$$

De modo que el triángulo QBR es isósceles y se tiene $QR = QB$. Entonces el punto R pertenece a la circunferencia de centro Q y radio QB que pasaba por B, C y P y efectivamente los cuatro puntos R, B, C y P son concíclicos.