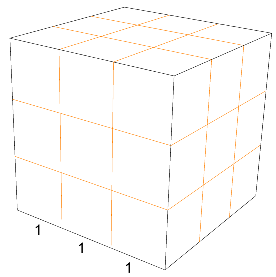
Seminario de problemas Curso 2017-18. Hoja 2 (principio del palomar)

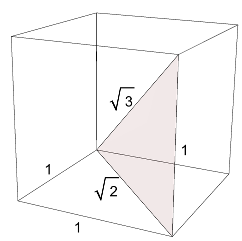
7. Se toman 28 puntos en el interior de un cubo de lado 3. Prueba que hay al menos dos puntos que están a una distancia menor o igual que $\sqrt{3}$.

Solución.

Dividimos el cubo en 27 cubos más pequeños de lado 1, como en la figura.



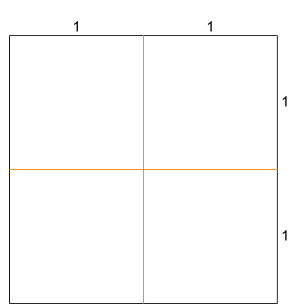
Por el principio del palomar, al menos dos de los 28 puntos estarán dentro del mismo cubo de lado 1. La mayor distancia a la que pueden estar dichos puntos en el cubo es igual a la diagonal del mismo, que vale $\sqrt{3}$, como es fácil deducir a partir del siguiente esquema



8. En un cuadrado de lado 2 se eligen nueve puntos cualesquiera. Prueba que hay tres de ellos que son los vértices de un triángulo de área menor o igual que 1/2.

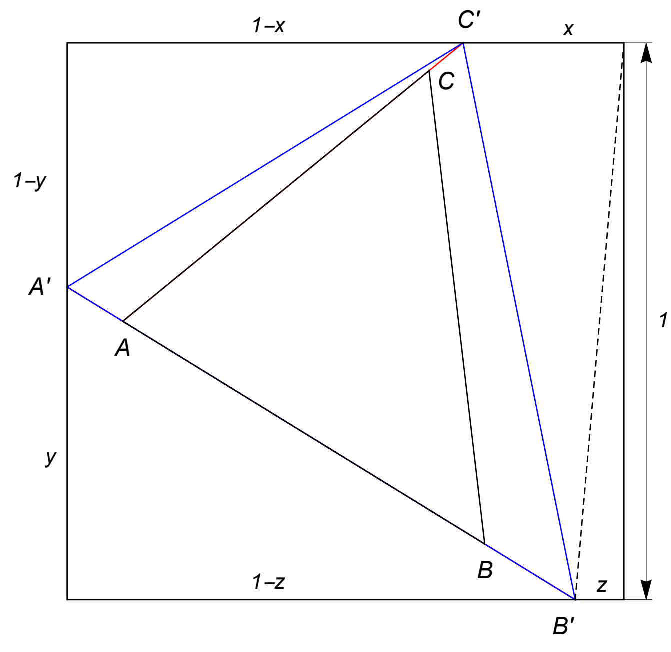
Solución.

Los datos sugieren construir 4 palomares, que resultan de la división del cuadrado de lado 2 en cuatro cuadrados de lado 1.



En uno de los cuadrados habrá tres puntos, pero el triángulo que formen no podrá tener área mayor que la mitad del cuadrado, es decir tendrá área menor o igual que $1/2$.

Esta última afirmación no es directa y vamos a ver cómo demostrar que tres puntos en un cuadrado no pueden formar un triángulo de área mayor que $1/2$. Para ello, consideremos un triángulo cualquiera ΔABC en un cuadrado de lado 1. Ahora prolongamos sus lados hasta cortar a los lados del cuadrado de manera que formamos un triángulo $\Delta A'B'C'$, como se ve en la figura.



Es evidente que el triángulo $\Delta A'B'C'$ tiene mayor área que el triángulo ΔABC. Por tanto, si el triángulo tiene área máxima, sus vértices están sobre los lados del cuadrado, como en el triángulo $\Delta A'B'C'$. Por otra parte el área de dicho tríngulo será mánima cuando el área que resta hasta completar el cuadrado sea mínima. Este área, que denotaremos por S, se puede obtener a partir de las cantidades que hemos denominado x, y, z, siendo

$$S = \frac{x}{2} + \frac{z}{2} + \frac{(1-z)y}{2} + \frac{(1-x)(1-y)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{(1-y)z}{2} + \frac{xy}{2}.$$

Como x, z, $1-y$ son cantidades mayores o iguales que 0, S será mínima cuando

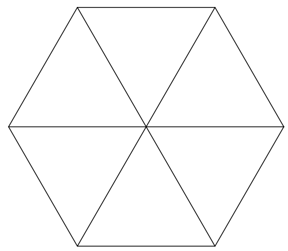
$$\frac{(1-y)z}{2} = \frac{xy}{2} = 0.$$

En ese caso $S = 1/2$ y el área máxima será $1/2$. (Observar que en el caso de tener un triángulo de área máxima, dos de los vértices coinciden con dos vértices consecutivos del cuadrado y el tercero está en un punto cualquiera del lado opuesto al lado formado por los otros dos.)

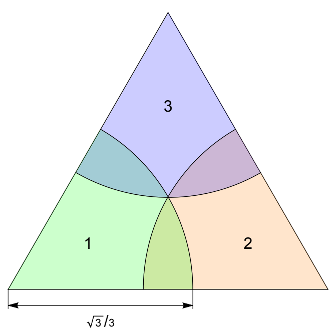
9. Se lanzan 19 dardos sobre una diana que tiene la forma de un hexágono regular de lado 1. Prueba que hay al menos dos dardos a distancia menor o igual que $\sqrt{3}/3$.

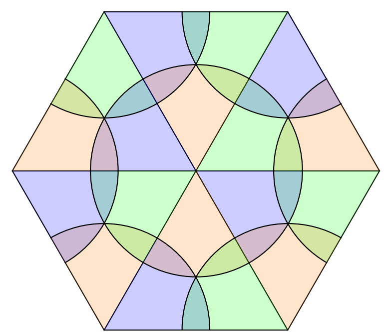
Solución.

Como en el problema anterior, debemos encontrar 18 palomares donde la distancia máxima dentro de los palomares sea igual a $\sqrt{3}/3$. Empecemos por dividir el hexágono en 6 partes iguales, que resultan de trazar las diagonales del mismo. De esta forma lo tenemos dividido en 6 triángulos equiláteros de lado 1.



A continuación dividimos cada uno de los triángulos en tres regiones iguales, aunque no disjuntas, trazando desde cada uno de los vértices un arco de radio $\sqrt{3}/3$, como en el dibujo, de manera que al final tenemos dividido el hexágono en 18 regiones.





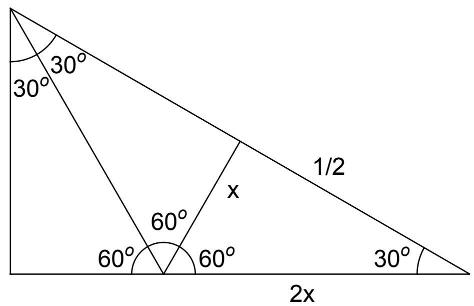
Como tenemos 19 puntos y 18 regiones, por el principio del palomar, en una de ellas habrá al menos dos puntos. Pero es evidente que la distancia de dos puntos dentro de una misma región es menor o igual que $\sqrt{3}/3$.

(**Nota:** Al no ser las regiones disjuntas, la cota de distancia se puede mejorar. De hecho, se puede demostrar que, en las condiciones del problema, siempre hay dos de ellos a distancia menor o igual que 1/2 y que esa distancia no se puede mejorar.)

10. En un triángulo rectángulo de hipotenusa unidad y ángulos respectivos de 30°, 60° y 90°, se eligen 25 puntos cualesquiera. Demostrar que siempre habrá 9 entre ellos que podrán cubrirse con un semicírculo de radio 3/10.

Solución.

El enunciado nos sugiere que construyamos 3 palomares, en uno de los cuales habrá 9 puntos. La cuestión es cómo encontrar los palomares, que deberían corresponderse con una división en tres partes iguales del triángulo. Esa partición puede ser la siguiente



en la que el triángulo ha quedado divido en tres triángulos iguales semejantes al primero. Al ser los triángulos rectángulos, estarán contenidos en un semicírculo de radio la mitad de la diagonal, es decir de radio x. De la figura se deduce, por el teorema de Pitágoras, que

$$x = \frac{1}{2\sqrt{3}} < \frac{3}{10}.$$

Por tanto los 9 puntos estarán dentro de un semicírculo de radio 3/10.

11. Tenemos un conjunto de 25 puntos en el plano de manera que, cualquiera que sean los tres que elijamos, hay dos de ellos que están a distancia menor que 1. Prueba que existe un círculo de radio 1 que contiene al menos a 13 de dichos puntos.

Solución.

Escojamos un punto A arbitrario. Buscamos ahora un punto B que se encuentre a distancia mayor que 1 de A. Si no existiera tal punto, el problema ya estaría resuelto, pues el círculo centrado en A y radio 1 contendría a los 25 puntos, en particular a 13.

Si existe B a distancia mayor que 1, nuestros palomares van a ser los círculos de radio 1 centrados en A y B. Considerando ahora los 23 puntos restantes, y por las condiciones del problema, cada uno de ellos estará en el círculo con centro A o en el círculo con centro B. Por el principio del palomar, en alguno de los dos círculos habrá 12 puntos que, junto con el centro del círculo, nos asegura que existe un círculo de radio 1 que contiene al menos 13 puntos

12. El Empire State Building tiene 102 pisos. Supón que un ascensor para 52 veces mientras desciende desde la última planta hasta la planta baja. Prueba que el ascensor ha parado en dos pisos cuya suma es 102.

Solución.

Los pisos en los que ha podido parar el ascensor van desde el piso 1 hasta el 101. Hagamos parejas con estos números, de manera que su suma sea 102, y que van a ser los palomares. En total hay 51 palomares, que corresponden a las parejas

$$(1, 101), (2, 100), (3, 99), \ldots, (50, 52), (51, 51).$$

Como el ascensor ha hecho 52 paradas, en alguno de los nidos ha hecho dos paradas, es decir ha parado en dos pisos cuya suma es 102. (Observa que en el último nido no puede haber dos palomas)

13. Prueba que existe al menos una potencia de 3 que acaba en 001.

Solución.

Consideremos los restos de las potencias de 3 al dividir por 1000, que van a ser los palomares. Hay 1000 restos posibles, luego hay 1000 palomares. Tomamos las 1001 primeras potencias de 3,

$$3,\ 3^2,\ 3^3,\ \ldots,\ 3^{1001}.$$

Como hay 1001 potencias, al menos dos de ellas dejarán el mismo resto al dividir por 1000. Supongamos que son las potencias 3^k y 3^j, con $k > j$. Su diferencia será múltiplo de 1000, es decir

$$3^k - 3^j = 1000n,$$

para algún número natural n. Factorizando la parte izquierda de la igualdad, tenemos

$$3^j(3^{k-j} - 1) = 1000n.$$

Es decir 1000 es un divisor del producto $3^j(3^{k-j} - 1)$. Pero como 1000 no divide a 3^j, debe ser que 1000 divide a $3^{k-j} - 1$. Dicho de otro modo, $3^{k-j} - 1$ acaba en 000 y entonces 3^{k-j} acaba en 001.

14. Prueba que, dados 100 enteros positivos distintos menores o iguales que 294, hay al menos dos cuya diferencia es 2, 3 o 5.

Solución.

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ los números dados. Además de este grupo de 100 números, consideramos también los dos siguientes grupos de números

$$a_1 + 3, a_2 + 3, \ldots, a_{100} + 3, \qquad a_1 + 5, a_2 + 5, \ldots, a_{100} + 5.$$

En total tenemos 300 números y están comprendidos entre 1 y 299 (ya que el mayor de todos ellos podría ser como mucho 294 y al sumarle 5 obtendríamos 299). Por el principio del palomar, hay dos números que son iguales. Además, esos números tienen que pertenecer a grupos distintos, pues los números que nos han dado son diferentes. Así, la diferencia entre estos dos números iguales puede ser 2, 3 o 5.

15. Te has propuesto resolver los problemas de esta hoja en una semana, resolviendo al menos un problema cada día. Prueba que habrá una serie de días consecutivos en los que habrás resuelto exactamente 4 problemas.

Solución.

Llamemos p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 y p_7 al número de problemas resolvemos cada uno de los días de la semana. Construimos ahora el siguiente conjunto de números, a partir de los anteriores

$$P_1 = p_1, \quad P_2 = p_1 + p_2, \quad P_3 = p_1 + p_2 + p_3, \quad \ldots \quad P_7 = p_1 + p_2 + \cdots + p_7.$$

Estos números son todos distintos y cumplen

$$1 \leq P_1 < P_2 < P_3 < P_4 < P_5 < P_6 < P_7 = 9.$$

Si ahora sumamos 4 a cada uno de los P_k tenemos otro conjunto de 7 números, todos ellos distintos, que están comprendidos entre 4 y 13. En total tenemos 14 números entre 1 y 13, por lo que, por el principio del palomar, habrá dos de ellos que son iguales y además deben estar en conjuntos distintos. Es decir, existen índices i y j tales que $P_j = P_i + 4$, por tanto $P_j - P_i = 4$. En resumen,

$$P_j - P_i = p_{i+1} + p_{i+2} + \cdots + p_j = 4,$$

y el número de problemas resuelto en los días consecutivos que van de $i + 1$ a j es exactamente 4.