Seminario de problemas. Curso 2019-20. Soluciones hoja 2. Geometría 1

21. Un trapecio *ABCD* está inscrito en una circunferencia de radio *R*. La base mayor es *AB*=*a*, la base menor *CD*=*b* y el ángulo $\widehat{CAB} = 30º$. Demuestra que $R = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2-ab}{3}}$

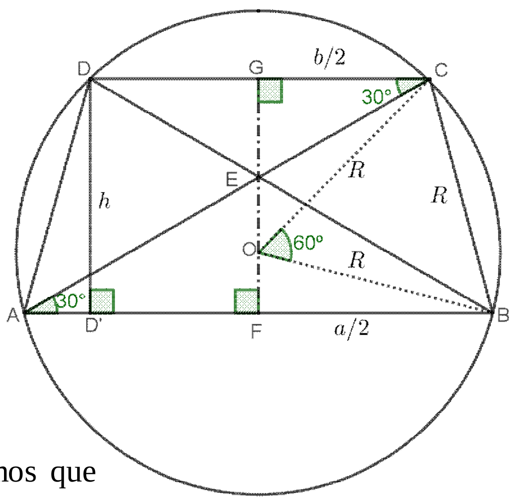
Solución

El trapecio ha de ser isósceles, ya que por ser cíclico $\widehat{DAB} = 180º - \widehat{BCD}$ y por ser trapecio $180º - \widehat{BCD} = \widehat{ABC}$. Por tanto, el trapecio es simétrico con respecto al eje que une los puntos medios de las bases *F* y *G*.

$\widehat{ACD} = \widehat{CAB} = 30º$ (alternos internos entre paralelas)

El triángulo *EGC* es un 30º-60º-90º, por lo que $GC = \dfrac{b}{2} = GE\sqrt{3} \Rightarrow GE = \dfrac{b}{2\sqrt{3}}$

Por la misma razón, en el triángulo *AFE*: $EF = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$



La altura *h* del trapecio es, por tanto, $h = GF = \dfrac{a+b}{2\sqrt{3}}$

Siendo *O* el centro de la circunferencia circunscrita, $\widehat{BOC} = 60º$, por ser central con el mismo arco que el inscrito $\widehat{CAB} = 30º$

Pero el triángulo *COB* es isósceles, pues $OC = OB = R$, por tanto ha de ser equilátero. Así $BC = OB = OC = R$

Si *D'* es la proyección ortogonal de *D* sobre *AB* tenemos que $AD' = \dfrac{a-b}{2}$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $AD'D$:

$$R = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{12} + \frac{(a-b)^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2+4b^2-4ab}{12}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2-ab}{3}} \quad c.q.d.$$

PROPUESTA 1

Si $\widehat{CAB}$ es un ángulo agudo cualquiera α, hallar *R* en función de $a, b\ y\ \alpha$.

Solución

Procederíamos de forma análoga usando un poco de trigonometría:

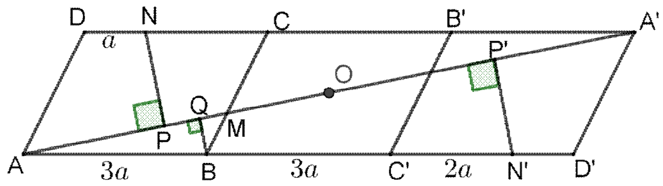
$h = \dfrac{a+b}{2} tg\alpha$ y $BC = AD = 2R\, sen\alpha$, con lo cual:

$$4R^2 sen^2\alpha = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 tg^2\alpha + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{(a+b)^2 tg^2\alpha + (a-b)^2}}{4\, sen\alpha}$$

22. En un paralelogramo *ABCD*, sea *M* el punto del lado *BC* tal que *MC=2BM* y sea *N* el punto del lado *CD* tal que *NC=2DN*. Si la distancia del punto *B* a la recta *AM* es 3, calcula la distancia del punto *N* a la recta *AM*.

Solución

Sea *AB=3a*. Triplicando la figura obtenemos otro paralelogramo con simetría de centro *O* (el centro del 2º paralelogramo), como muestra la figura:

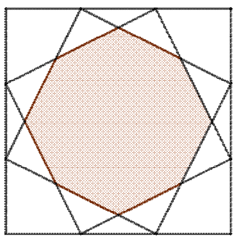


De la semejanza entre los triángulos rectángulos *ABQ* y *AN'P'*:

$$\frac{P'N'}{AN'} = \frac{QB}{AB}$$, de donde, al ser *QB=3* tendremos $PN = P'N' = \frac{3 \cdot 8a}{3a} = 8$

La distancia buscada es, por tanto, igual a 8.

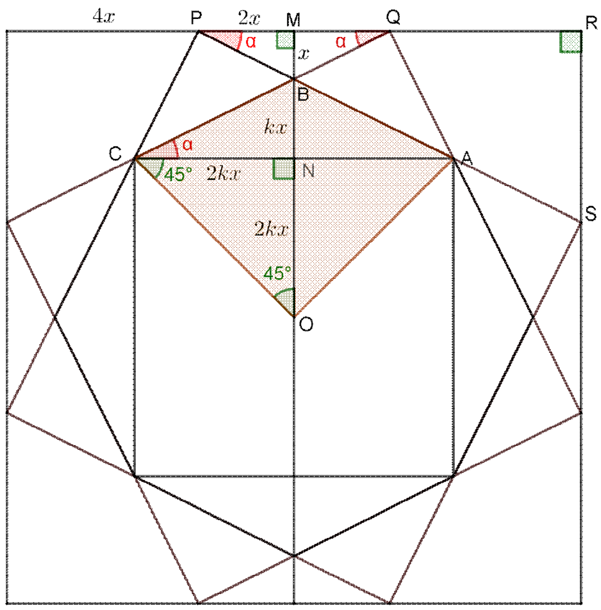
23. La figura muestra dos cuadrados iguales superpuestos dentro de un cuadrado mayor. Los vértices de los cuadrados pequeños dividen cada uno de los lados del cuadrado más grande en tres partes iguales. Si el área de la región sombreada es 50, halla el área del cuadrado mayor.



Solución

La figura explica por sí sola el arranque de la solución:

Sea $12x$ el lado del cuadrado mayor. Buscamos, por tanto, $144x^2$.
Notemos que el octógono resultante es equilátero pero no es equiángulo y que la figura es invariante por giros de 90º en torno a *O*, centro común de los tres cuadrados.



De la semejanza entre los triángulos rectángulos *PMB* y *PRS* (la razón entre sus catetos es 2) se desprende que, siendo *M* el punto medio de *PQ*, *MB=x* .

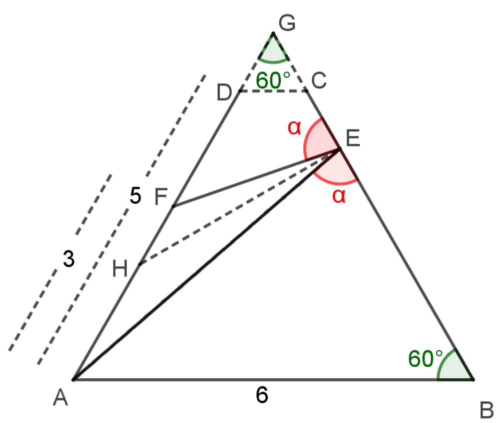
Los triángulos *CNB* y *PMB* también son semejantes. Sea *k* la razón de semejanza.
Por ello, *BN=kx* y *CN=2kx*.

El triángulo *CON* es rectángulo e isósceles, por lo que *CN=NO=2kx*.

$$OM = 6x = MB + BO = x + BO \Rightarrow BO = 5x = 3kx \Rightarrow k = \frac{5}{3}$$

El cuadrilátero *OCBA* tiene sus diagonales perpendiculares, por lo que su área es el semiproducto de sus diagonales $\left(AC = 4kx = \frac{20}{3}x \;\; y \;\; BO = 3kx = 5x \right)$ y a su vez es la cuarta parte del área de la región sombreada: $\frac{50}{4} = \frac{50x^2}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow 144x^2 = 108$, que es el área buscada.

24. Un trapecio isósceles *ABCD* tiene de bases *AB* y *CD*, con *AB=6* , *AD=5* y $\widehat{DAB} = 60^{\circ}$. Se lanza un rayo de luz desde *A* que rebota en *CB* en el punto *E* interseca a *AD* en el punto *F*. Si *AF=3*, calcula el área del triángulo *AFE*.



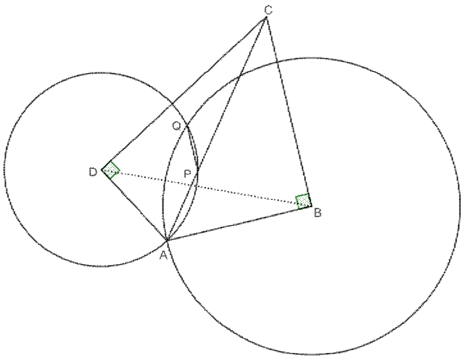
<u>Solución</u>

Prolongando los lados oblicuos obtendremos un triángulo equilátero *ABG* de lado 6. Es claro que *F* es el punto medio de *AG*.

Sea *H* el punto en que la perpendicular a *BG* en *E* corta al lado *AD*.
Por las propiedades de la reflexión:
$\widehat{AEH} = \widehat{HEF} \Rightarrow \widehat{FEG} = \widehat{AEB} = \alpha$
(pues son complementarios de dos ángulos iguales)

Los triángulos *AEB* y *FEG* son semejantes pues ambos tienen dos ángulos respectivamente iguales a α y 60º. La razón de semejanza es $\frac{AB}{FG}=\frac{6}{3}=2$, por lo que la razón de sus áreas es 4.
Los triángulos *AEF* y *FEG* comparten altura desde *E* y sus bases son iguales a 3, por lo que tendrán la misma área. Llamemos *S* a esta área.
$\left[ABG\right]=\frac{6^2\sqrt{3}}{4}=\left[AEB\right]+\left[AEF\right]+\left[FEG\right]=4S+S+S=6S$ de donde se obtiene que el área buscada es $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

25. Sea un cuadrilátero *ABCD* donde los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$ son rectos. La circunferencia de centro *D* y radio *DA* corta al segmento *AC* en el punto *P* y a la circunferencia de centro *B* y radio *BA* en el punto *Q*. Demuestra que *PQ* es perpendicular a *AB*.

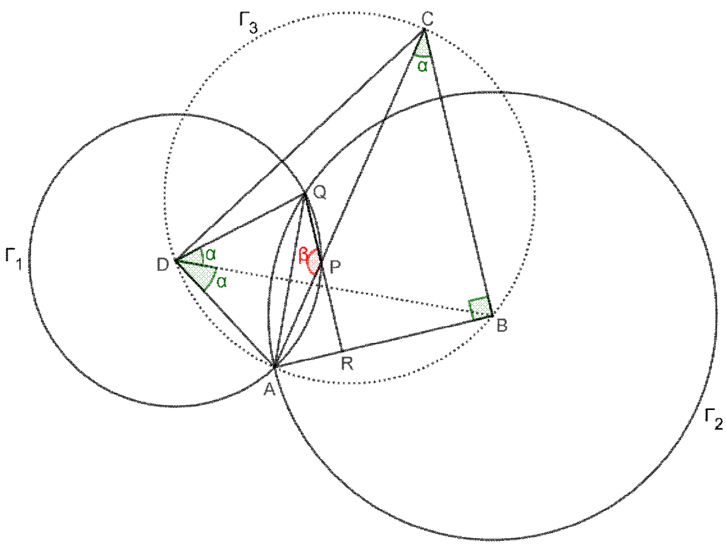


Solución

Sea *R* el punto de corte de la recta *QP* y el lado *AB*, y sea $\alpha=\widehat{ACB}$.
Bastará con demostrar que $\widehat{APR}=\widehat{ACB}=\alpha$, pues en tal caso $PR \parallel BC \perp AB$

Sean Γ_1 *y* Γ_2 las circunferencias de centros *D* y *B* y radios respectivos *DA* y *AB*.

El cuadrilátero *ABCD* es cíclico pues $\widehat{B}+\widehat{D}=180º$. Sea Γ_3 su circunferencia circunscrita en la que *AC* es diámetro.
En Γ_3, por ser inscritos con igual arco $\widehat{AB}$, tenemos que $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}=\alpha$.



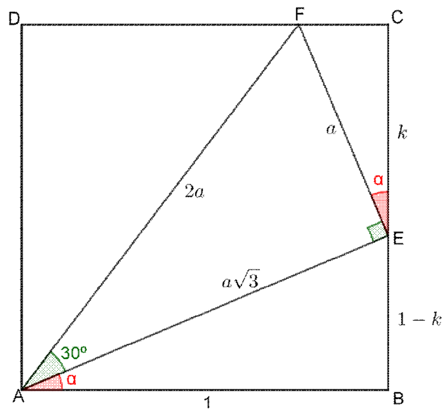
QA es el eje radical de Γ_1 y Γ_2, por lo que DB es su mediatriz, y por tanto $\widehat{ADB} = \widehat{QDB} = \alpha$. En Γ_1 el ángulo $\beta = \widehat{QPA}$ es inscrito con el mismo arco que un ángulo central de $360º - 2\alpha$, por lo cual $\beta = 180º - \alpha \Rightarrow \widehat{APR} = \alpha \quad c.q.d.$

26. Demuestra que el área del mayor triángulo 30º-60º-90º situado dentro del cuadrado unidad es mayor que 1/3.

<u>Solución</u>

Basta con probar que alguno de tales triángulos tiene un área mayor que 1/3.

Consideremos el triángulo *AEF* de la figura:



Si es un triángulo 30º-60º-90º cumplirá:

$EF = a$, $AF = 2a$, $AE = a\sqrt{3}$

y los triángulos rectángulos *ABE* y *ECF* serán semejantes, ya que ambos tendrán un ángulo agudo igual:

$$\widehat{FEC} = \widehat{EAB} = 90º - \widehat{AEB} = \alpha \text{ .}$$

La razón de semejanza entre ambos sería

$$k = EC = \frac{AE}{EF} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BE = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo *ABE*:

$$3a^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1 = \frac{7}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{7}{9} - \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

El área de *AEF* es $\quad [AEF] = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{7\sqrt{3}}{18} - \dfrac{1}{3}$

Bastará con probar que $\dfrac{7\sqrt{3}}{18} > \dfrac{2}{3}$ o mejor $7\sqrt{3} > 12$ lo cual es cierto ya que

$$\left(7\sqrt{3}\right)^2 = 147 > 144 = 12^2$$

27. Una circunferencia es tangente en los puntos *A* y *B* a los lados de un ángulo con vértice en el punto *O*. En la circunferencia, en el interior del triángulo *AOB*, se toma un punto *C*. Sabiendo que las distancias de *C* a las rectas *OA* y *OB* son respectivamente *p* y *q*, halla la distancia de *C* a la cuerda *AB*.

<u>Solución</u>

Trazamos desde *C* las perpendiculares *CD*, *CE* y *CF* a las rectas *OA*, *OB* y *AB*.

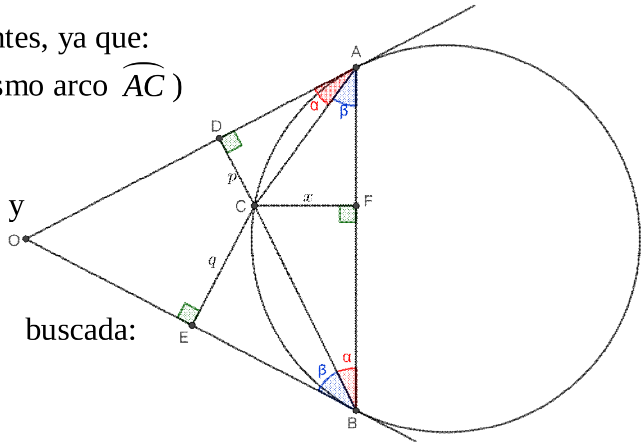
Sean $CD = p$, $CE = q$ y $CF = x$

Los triángulos rectángulos *ADC* y *BFC* son semejantes, ya que: $\widehat{DAC} = \widehat{FBC} = \alpha$ (semiinscrito e inscrito con el mismo arco $\widehat{AC}$)

Por ello: $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{p}{x}$ (*) .

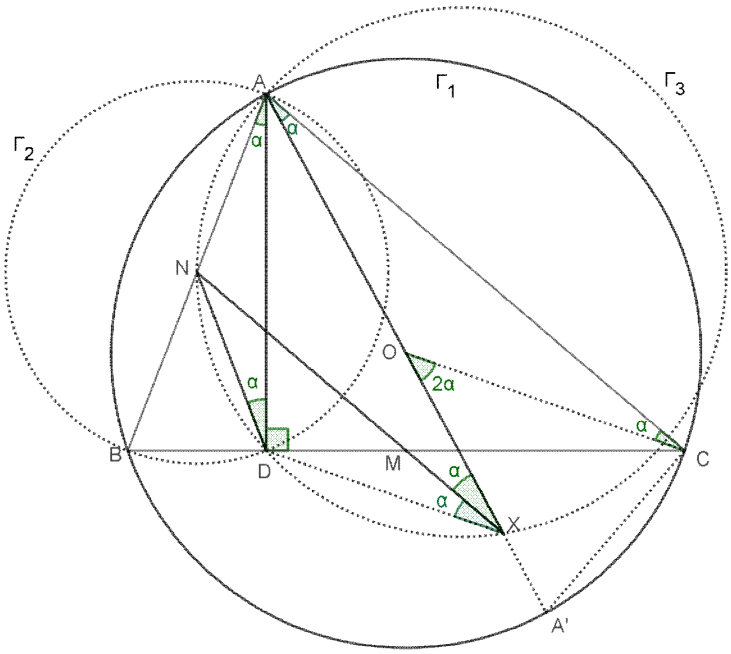
Análogamente son semejantes los triángulos *ACF* y *BCE*: $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{x}{q}$ (**)

De (*) y (**) se obtiene la relación buscada: $\dfrac{x}{q} = \dfrac{p}{x} \Rightarrow x^2 = p \cdot q \Rightarrow x = \sqrt{p \cdot q}$



28. Sea *ABC* un triángulo acutángulo con *AB<AC* , en el que *AD* es la altura correspondiente al vértice *A*, *O* es el circuncentro y *M* y *N* los puntos medios de los lados *BC* y *AB* respectivamente. La recta *AO* corta a la recta *MN* en *X*. Demuestra que el segmento *DX* es paralelo a *OC*.

<u>Solución</u>



Si prolongamos *AX* hasta volver a cortar a la circunferencia Γ_1 circunscrita a *ABC* en el punto A', observaremos que, al ser $\widehat{ABC} = \widehat{AA'C}$ (por estar inscritos en Γ_1 con igual arco $\widehat{AC}$) los ángulos $\widehat{BAD}$ y $\widehat{OAC}$ son iguales pues ambos son complementarios de $\hat{B}$ en los triángulos rectángulos *ADB* y *ACA'*. Sean $\widehat{BAD} = \widehat{OAC} = \alpha$.

Desde *D* se ve el segmento *AB* bajo ángulo recto. Por ello, D pertenece a la circunferencia Γ_2 de diámetro *AB* por lo que *ND=NB=NA* (los tres son radios).
El triángulo *NAD* es por tanto isósceles con $\widehat{NAD} = \widehat{NDA} = \alpha$.

El triángulo *OAC* es también isósceles, pues en la circunferencia Γ_1 circunscrita a *ABC*, *OA* y *OC* son radios. Por tanto $\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = \alpha$. Luego en el triángulo *AOC*, el ángulo exterior $\widehat{XOC} = 2\alpha$.

Las rectas paralelas *AC* y *NM* son cortadas por la transversal *AX*, por lo que:
$\widehat{XAC} = \widehat{OAC} = \widehat{AXN} = \alpha$ (alternos internos).

Desde *D* y *X* se ve el segmento *AN* bajo el mismo ángulo α , por lo que el cuadrilátero *ANXD* es cíclico. Sea Γ_3 su circunferencia circunscrita.

En Γ_3, por ser inscritos con el mismo arco $\widehat{ND}$ se tiene que $\widehat{NXD} = \widehat{NAD} = \alpha$.
La transversal *AX* corta a las rectas *OC* y *DX* formando con ellas el mismo ángulo 2α , de donde se desprende que *OC* y *DX* son paralelas c.q.d.

29. En el triángulo acutángulo *ABC*, la longitud de la altura *AP* es *h*, la longitud de la mediana *AM* es *m*. Se sabe que en la bisectriz *AN* el punto *N* es el punto medio del segmento *MP*. Demuestra que la distancia del vértice *A* al ortocentro del triángulo (*H*) es: $AH = \dfrac{m^2 - h^2}{2h}$

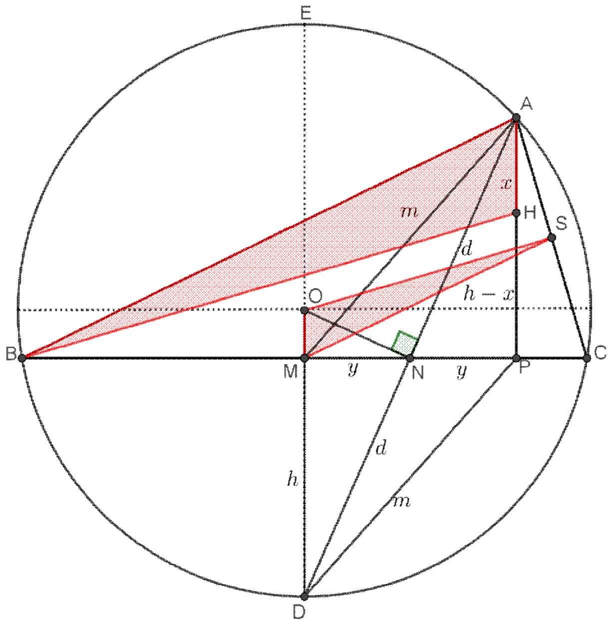
Solución

Sea Γ la circunferencia circunscrita a *ABC*. Sabemos que la bisectriz interior de $\widehat{A}$ vuelve a cortar a Γ en un punto *D* de la mediatriz de *BC*.

Al ser $AP \parallel DM$ y *N* punto medio de *MP*, el cuadrilátero *AMDP* es un paralelogramo de centro *N* (es inmediata la congruencia $\triangle DMN \equiv \triangle APN$ que, al estar alineados los puntos *M*, *N* y *P*, trae consigo una simetría de centro *N*). Entonces podemos poner:

$ND = NA = d$: $MD = AP = h$; $AM = PD = m$. Además: $ON \perp AD$, pues N es el punto medio de la cuerda *AD*.

Sean $x = AH$, $y = MN = NP$ y sea *S* el punto medio de *AC*.



Los triángulos *BHA* y *SOM* son semejantes, pues los lados de uno son paralelos a los del otro: $OM \parallel AH$; $OS \parallel BH$ (pues *OS* es la mediatriz de *AC* y *BH* está en la altura sobre *AC*) y, por último $MS \parallel AB$, por ser la paralela media. De este último detalle deducimos que la razón de semejanza entre ambos es 2.

Por tanto *AH=2·OM*.
Por el teorema de la altura en el triángulo rectángulo *OND*:

$y^2 = OM \cdot h \Rightarrow x = 2 \cdot OM = \dfrac{2y^2}{h} = \dfrac{m^2 - h^2}{2h}$, ya que en *AMP*: $m^2 = h^2 + 4y^2$ (Pitágoras).

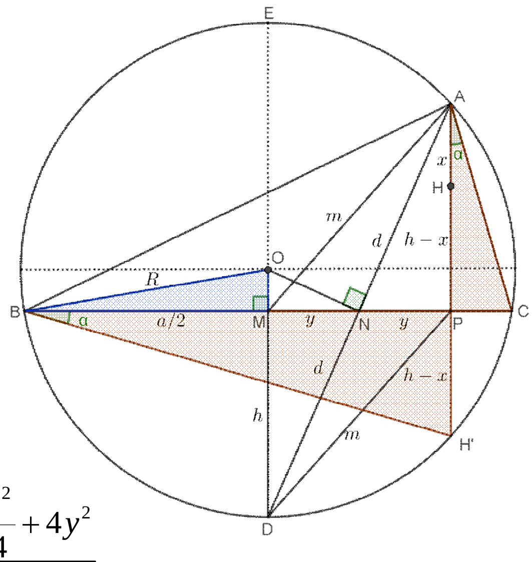
Solución 2

Sea Γ la circunferencia circunscrita a *ABC*. Sabemos que:

1) La bisectriz interior de $\widehat{A}$ vuelve a cortar a Γ en un punto *D* de la mediatriz de *BC*.
2) Si *H'* es el simétrico de *H* respecto a *BC* , *H'* pertenece a Γ

Al ser $AP \parallel DM$ y *N* punto medio de *MP*, el cuadrilátero *AMDP* es un paralelogramo de centro *N* (es inmediata la congruencia $\triangle DMN \equiv \triangle APN$ que, al estar alineados los puntos *M*, *N* y *P*, trae consigo una simetría de centro *N*), por lo que podemos poner:

$ND = NA = d$: $MD = AP = h$; $AM = PD = m$. Además: $ON \perp AD$, pues N es el punto medio de la cuerda *AD*.



Si *R* es el radio de Γ, *OB=OD=R*

Sean *x* la longitud de *AH* e $y = MN = NP$.

Los triángulos rectángulos *BPH'* y *APC* son semejantes porque, además del ángulo recto, tienen un ángulo agudo común: $\widehat{PBH'} = \widehat{PAC} = \alpha$ (inscritos con igual arco $\widehat{CH'}$)

Por ello: $\dfrac{BP}{PH'} = \dfrac{AP}{PC}$ es decir:

$\dfrac{\frac{a}{2} + 2y}{h - x} = \dfrac{h}{\frac{a}{2} - 2y}$, de aquí: $h^2 - hx = \dfrac{a^2}{4} - 4y^2 \Rightarrow x = \dfrac{h^2 - \frac{a^2}{4} + 4y^2}{h}$

En el triángulo rectángulo *BMO*: $\dfrac{a^2}{4} = R^2 - (R-h)^2 = 2Rh - h^2$

Aplicando al triángulo rectángulo *OND* el teorema del cateto: $d^2 = Rh$, con lo que obtenemos nuevas expresiones de *x*:

$$x = \frac{2h^2 - 2Rh + 4y^2}{h} = \frac{2h^2 - 2d^2 + 4y^2}{h} \quad (*)$$

Necesitamos poner esta última expresión en términos de *h* y *m*.

En el triángulo rectángulo AMP: $h^2 + 4y^2 = m^2 \Rightarrow 4y^2 = m^2 - h^2$

En el triángulo rectángulo ANP: $d^2 = h^2 + y^2 = h^2 + \dfrac{m^2 - h^2}{4} = \dfrac{3h^2 + m^2}{4}$

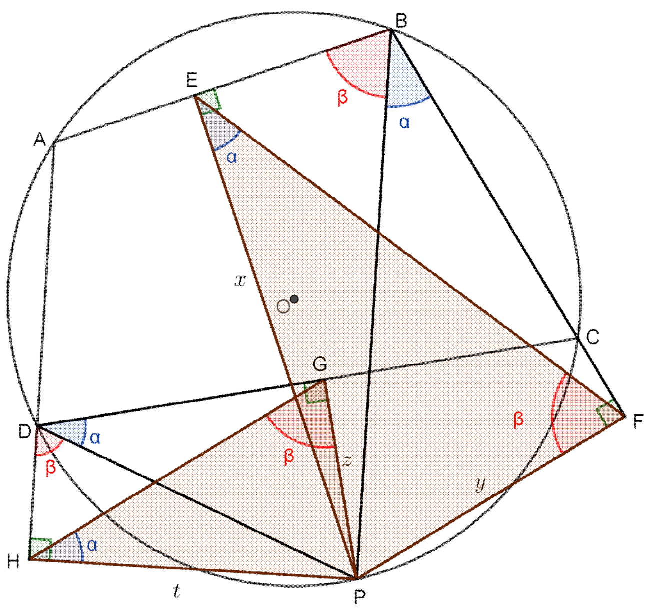
Sustituyendo ambas en (*) : $x = \dfrac{h^2 - \dfrac{3h^2 + m^2}{2} + m^2}{h} = \dfrac{m^2 - h^2}{2h}$ *c.q.d.*

30. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y P un punto cualquiera de su circunferencia circunscrita. Si x, y, z y t son las distancias de P a las rectas AB, BC, CD y DA respectivamente, demuestra que $x \cdot z = y \cdot t$

Solución

Si P es uno de los vértices del cuadrilátero, ambos miembros serán nulos y, por tanto, se cumple la relación.

Si no es así, supongamos, por ejemplo, que P pertenece al arco CD que no contiene a A y B, y sean E, F, G y H los pies de las perpendiculares desde P a las rectas AB, BC, CD y DA respectivamente:



Utilizaremos dos ideas básicas:

a) *Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si tiene dos ángulos opuestos suplementarios.*
Por ello, serán cíclicos, además de $ABCD$, los cuadriláteros $HDGP$, $EBPF$, $AEPH$ y $PGCF$ al tener dos ángulos opuestos que son rectos.
b) *En un cuadrilátero cíclico, el ángulo formado por un lado y una diagonal es igual al formado por el lado opuesto y la otra diagonal.*

Bastará con demostrar la semejanza $\triangle HGP \sim \triangle EPF$

Sean $\widehat{B} = \widehat{ABC}$, $\widehat{D} = \widehat{ADC}$, $\alpha = \widehat{PDG}$ y $\beta = \widehat{ABP} = \widehat{B} - \alpha$

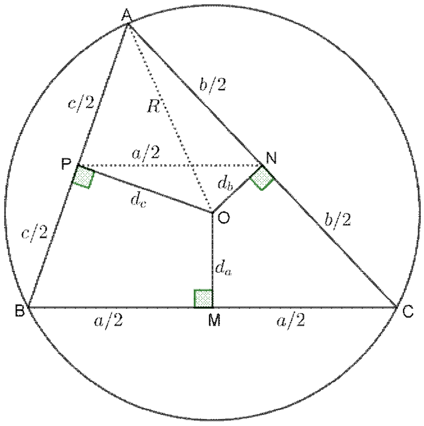
Por ser $HDGP$ cíclico $\widehat{GHP} = \widehat{PDG} = \alpha$
Por ser inscritos con igual arco $\widehat{CP}$: $\widehat{PBC} = \widehat{PBF} = \alpha$
Por ser $ABCD$ cíclico, $\widehat{CDH} = 180º - \widehat{D} = \widehat{B}$, ya que debe ser $\widehat{D} + \widehat{B} = 180º$
Entonces $\widehat{HDP} = \widehat{B} - \widehat{PDG} = \widehat{B} - \alpha = \beta$ y por ser $EBFP$ cíclico, también $\widehat{EFP} = \beta$
Luego $\triangle HGP \sim \triangle EPF$, por tener ambos ángulos iguales a α y β.
De esta semejanza: $\frac{t}{z} = \frac{x}{y} \Rightarrow t \cdot y = x \cdot z \quad c.q.d.$

31. En un triángulo acutángulo *ABC*, sean d_a, d_b, d_c las distancias del circuncentro a los lados *BC, CA* y *AB* respectivamente. Demostrar que $d_a + d_b + d_c = r + R$, donde *r* y *R* son los respectivos radios de las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo *ABC*.

(Teorema de Carnot en el caso acutángulo)

Solución

Sean *M, N* y *P* los puntos medios de los lados *BC, CA* y *AB* respectivamente. Evidentemente $d_1 = OM$, $d_2 = ON$ y $d_3 = OP$. Los cuadriláteros *APON, BPOM* y *CMON* son cíclicos por tener todos ellos dos ángulos rectos opuestos. En los tres, una de las diagonales es *R* y la otra es la mitad de uno de los lados de *ABC* (ver figura).



Aplicamos a los tres cuadriláteros cíclicos el teorema de Ptolomeo:

$$\left.\begin{array}{l} R\cdot\frac{a}{2} = \frac{b}{2}d_c + \frac{c}{2}d_b \\ R\cdot\frac{b}{2} = \frac{c}{2}d_a + \frac{a}{2}d_c \\ R\cdot\frac{c}{2} = \frac{a}{2}d_b + \frac{b}{2}d_a \end{array}\right\} \Rightarrow R\cdot p = \left(\frac{b+c}{2}\right)d_a + \left(\frac{a+c}{2}\right)d_b + \left(\frac{a+b}{2}\right)d_c \ (*) \quad \text{con } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Por otro lado sabemos que el área de *ABC* es $[ABC] = [OBC] + [OCA] + [OAB]$

$$r \cdot p = \frac{ad_a}{2} + \frac{bd_b}{2} + \frac{cd_c}{2} \ (**)$$

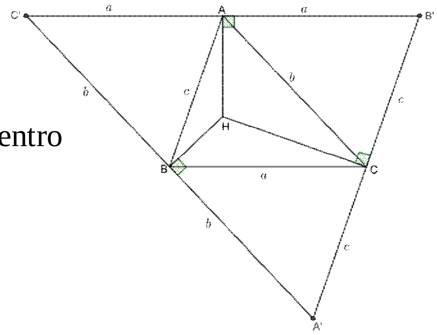
Sumando término a término las igualdades (*) y (**)

$$(R + r)\, p = p(d_a + d_b + d_c) \Rightarrow r + R = d_a + d_b + d_c \quad c.q.d.$$

PROPUESTA 2

En un triángulo acutángulo *ABC* de ortocentro *H*, ¿Cuánto suman las distancias *HA*, *HB* y *HC*?

Solución



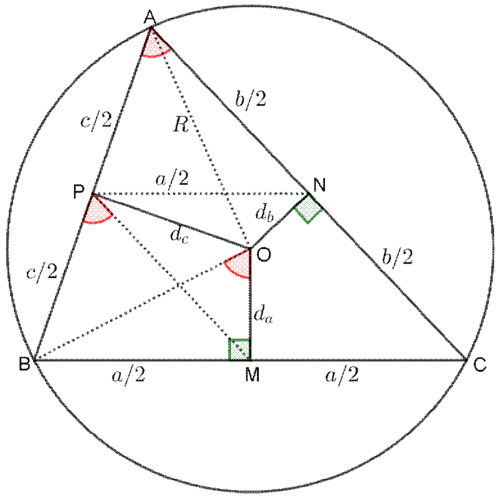
Trazando paralelas por *A, B* y *C* a los lados *BC*, *AC* y *AB* respectivamente, obtendremos un triángulo *A'B'C'* semejante a *ABC* con razón de semejanza *k=2.*
Las alturas de *ABC* son las mediatrices de *A'B'C'*, por lo que el ortocentro de *ABC* es el circuncentro de *A'B'C'*.

Según el Teorma de Carnot: $HA+HB+HC=R'+r'=2R+2r$

PROPUESTA 3

En un triángulo acutángulo *ABC* demuestra la relación $r=R\left(\cos A+\cos B+\cos C-1\right)$,
donde *r* y *R* son respectivamente los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo *ABC.*

Solución 1



Nos basaremos en el teorema de Carnot
$r+R=d_a+d_b+d_c$

El triángulo *BMO* es rectángulo en *M.*
$d_a=OB\cdot\cos\widehat{BOM}=R\cos\widehat{BOM}$

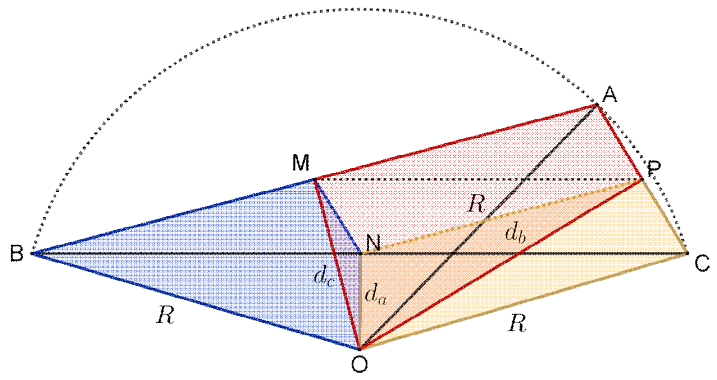
Por ser *BPOM* cuadrilátero cíclico:
$\widehat{BOM}=\widehat{BPM}=\widehat{A}$
Por tanto, $d_a=R\cos A$
De forma análoga:

$d_b=R\cos B \quad y \quad d_c=R\cos C$, con lo que queda:
$$r+R=R\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)\Rightarrow\frac{r+R}{R}=\cos A+\cos B+\cos C$$
De aquí $\dfrac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C-1\Rightarrow r=R\left(\cos A+\cos B+\cos C-1\right)$ *c.q.d.*

PROPUESTA 4

En un triángulo obtusángulo *ABC* con $\widehat{A}>90^{\circ}$, sean d_a, d_b, d_c las distancias del circuncentro a los lados *BC, CA* y *AB* respectivamente. Demostrar que $d_b+d_c-d_a=r+R$, donde *r* y *R* son los respectivos radios de las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo *ABC.*
(Teorema de Carnot en el caso obtusángulo).

Solución



Sean M, N y P os puntos medios de los lados AB, BC y CA respectivamente.
Los cuadriláteros $OPAM$, $ONPC$ y $ONMB$ son cíclicos al tener todos ellos dos ángulos rectos.
Aplicamos en cada uno de ellos el teorema de Ptolomeo:

$$\frac{a}{2}R=\frac{b}{2}d_c+\frac{c}{2}d_b \qquad (1)$$

$$\frac{a}{2}d_b=\frac{b}{2}d_a+\frac{c}{2}R \Rightarrow \frac{c}{2}R=\frac{a}{2}d_b-\frac{b}{2}d_a \qquad (2)$$

$$\frac{a}{2}d_c=\frac{b}{2}R+\frac{c}{2}d_a \Rightarrow \frac{b}{2}R=\frac{a}{2}d_c-\frac{c}{2}d_a \qquad (3)$$

Además, siendo $p=\dfrac{a+b+c}{2}$:

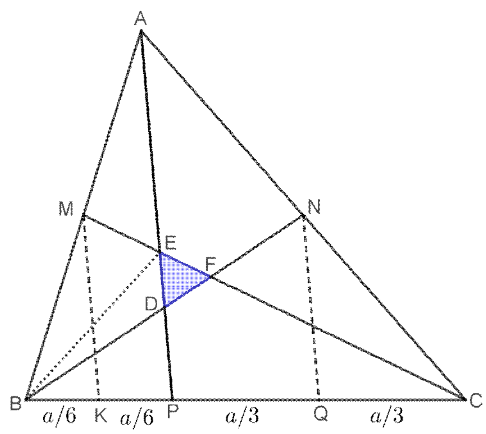
$$p\cdot r=[ABC]=[OAB]+[OAC]-[OBC]=\frac{c}{2}d_c+\frac{b}{2}d_b-\frac{a}{2}d_a \qquad (4)$$

Sumando las relaciones (1)+(2)+(3)+(4):

$$p(R+r)=p\cdot d_b+p\cdot d_c-p\cdot d_a \Rightarrow R+r=d_b+d_c-d_a \qquad c.q.d.$$

32. Por los puntos medios de dos lados de un triángulo ABC trazamos las medianas y unimos los puntos que trisecan el tercer lado con el vértice opuesto. Así, en el interior, se obtiene una pajarita (dos triángulos unidos por un vértice). Se pide calcular la fracción de superficie total del triángulo que representa la pajarita.

Solución 1



Supongamos $[ABC]=1$

Sea K el punto medio de BP. Por ser MK y NQ paralelas medias de BAP y CAP:

$$MK \parallel AP \parallel NQ \ \text{ con } MK=NQ=\frac{1}{2}AP$$

$$\triangle EPC \sim \triangle MKC \quad \left(k=\frac{CP}{CK}=\frac{4}{5}\right)$$

$$EP=\frac{4}{5}MK=\frac{2}{5}AP \Rightarrow AE=\frac{3}{5}AP=\frac{12}{20}AP$$

DP es paralela media en el triángulo BQN:

$$DP=\frac{1}{2}NQ=\frac{1}{4}AP=\frac{5}{20}AP$$

Por fin $ED = PE - DP = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right)AP = \frac{3}{20}AP$

Los puntos *D* y *E* dividen la ceviana *AP* en tres segmentos A*E*, *ED* y *DP* proporcionales a 12, 3 y 5.

Trazamos el segmento auxiliar *BE*. Los triángulos *ABE*, *BED* y *BDP* comparten altura desde *B*. Sus áreas son proporcionales a las respectivas bases *AE*, *ED* y *DP* (es decir, proporcionales a 12, 3 y 5) y suman 1/3. Por tanto:

$[ABE] = \frac{12}{20}\cdot\frac{1}{3} = \frac{12}{60}$; $[BED] = \frac{3}{20}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{60}$: $[BDP] = \frac{5}{20}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{60}$

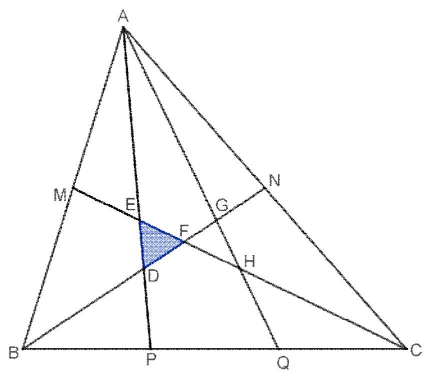
Pero *EM* es mediana del triángulo *ABE*, por lo que $[BME] = \frac{1}{2}[ABE] = \frac{6}{60}$

F es el baricentro de *ABC*, por lo que $[BMF] = \frac{1}{6}$

Finalmente $[BMF] = \frac{1}{6} = [BME] + [BED] + [DEF] = \frac{6}{60} + \frac{3}{60} + [DEF] \Rightarrow [DEF] = \frac{1}{60}$

Lo mismo para el área del triángulo *FGH*, que también será 1/60.

El área de la pajarita es, por tanto, 1/30 del área del triángulo *ABC*.



<u>Solución 2 (eficaz, pero sosa)</u>

Aplicamos el teorema de Routh para las razones

$r = \frac{BM}{MA} = 1$; $s = \frac{AN}{NC} = 1$; $t = \frac{CP}{PB} = 2$

$$\frac{[EDF]}{[ABC]} = \frac{(rst-1)^2}{(rs+r+1)(st+s+1)(tr+r+1)} = \frac{1}{3\cdot4\cdot5} = \frac{1}{60}$$

Análogamente (las mismas razones en sentido contrario): $\frac{[FGH]}{[ABC]} = \frac{1}{60}$

Por tanto la razón buscada es $\frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{30}$