

1. Hallar S_{2025} sabiendo que: $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Solución:

Resolvemos aplicando el método de inducción matemática:

$$S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2} \quad S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6+2+1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Intuimos que el numerador es el índice del término que se está calculando y el denominador una unidad más, es decir: $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Aplicando inducción, veamos si $S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

Por tanto: $S_{2025} = \frac{2025}{2026}$

2. Demuestra que la suma de cubos de tres números naturales consecutivos es múltiplo de 9.

Solución:

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } n \equiv 0 \pmod{3} : 3n \equiv 0 \pmod{9} \\ \text{Si } n \equiv 1 \pmod{3} : n^2 + 2 \equiv 0 \pmod{3} \rightarrow 3(n^2 + 2) \equiv 0 \pmod{9} \\ \text{Si } n \equiv 2 \pmod{3} : n^2 + 2 \equiv 0 \pmod{3} \rightarrow 3(n^2 + 2) \equiv 0 \pmod{9} \end{array} \right\} \Rightarrow 3n(n^2 + 2) \equiv 0 \pmod{9}$$

3. Un número entero se escribe con tres cifras diferentes. Obtenemos tres números de dos cifras cada uno suprimiendo respectivamente la cifra de las centenas, la de las decenas y la de las unidades. La suma de estos tres números es la mitad del número de tres cifras inicial. Hallar los números que verifican esta condición.

Solución:

Sea el número inicial (abc) .

Al suprimir alguna de sus cifras, se transforma en (bc) , (ac) y (ab) .

Se debe cumplir que: $(abc) = 2((bc) + (ac) + (ab))$.

$$100a + 10b + c = 2((10b+c) + (10a+c) + (10a+b)) = 40a + 22b + 4c$$

$$60a = 12b + 3c \rightarrow 20a = 4b + c$$

Teniendo en cuenta que $0 \leq a, b, c \leq 9$ ($a \neq 0$):

$$a=1 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline b & 5 & 4 & 3 \\ \hline c & 0 & 4 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$a=2 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline b & 9 & 8 \\ \hline c & 4 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Esto nos da como posibles soluciones: 150, 144, 138, 294 y 288.

Como las tres cifras deben ser diferentes, solo son válidas: 138, 150 y 294.

4. Demostrar que para tres números reales cualesquiera $(x, y, z \in \mathcal{R})$:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

Solución:

Lo que hay que demostrar es equivalente a: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$

$$2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = (x - y)^2 + (z - x)^2 + (y - z)^2 \geq 0$$

5. Determina la relación entre b y c para que estén en progresión aritmética las soluciones de:

$$x^3 + bx^2 + cx = 0$$

Solución:

Al no tener el polinomio término independiente, una de sus raíces es $x=0$.

Para que las otras dos soluciones estén en progresión aritmética, tenemos dos casos:

$$1) \quad x = -a, 0, a \rightarrow (x+a)x(x-a) = x^3 - a^2x \rightarrow b = 0, c \leq 0$$

$$2) \quad x = 0, a, 2a \rightarrow x(x-a)(x-2a) = x^3 - 3ax^2 + 2a^2x \rightarrow b = -3a, c = 2a^2 \rightarrow a = \frac{-b}{3}$$

$$\text{Por tanto, } c = 2\left(\frac{-b}{3}\right)^2 = \frac{2b^2}{9}$$

6. Demostrar que: $N = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ es un número entero.

Solución:

$$\begin{aligned} N^3 &= \left(\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} \right)^3 = \\ &= \left(\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} \right)^3 + 3 \left(\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} + 3 \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} \right)^3 = \\ &= 45 + 29\sqrt{2} + 3 \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} \right) + 45 - 29\sqrt{2} = \\ &= 90 + 3 \sqrt[3]{45^2 - 29^2 \cdot 2} \cdot \left(\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} \right) = 90 + 3 \cdot 7 \cdot N \quad \left(\sqrt[3]{45^2 - 29^2 \cdot 2} = \sqrt[3]{343} = 7 \right) \end{aligned}$$

Así, $N^3 = 90 + 21 \cdot N$, luego N es raíz del polinomio $N^3 - 21 \cdot N - 90$.

Si tiene alguna raíz entera, debe ser divisor de 90.

Con la raíz $N = 6$ obtenemos respuesta afirmativa ($6^3 - 21 \cdot 6 - 90 = 0$) y, aplicando Ruffini:

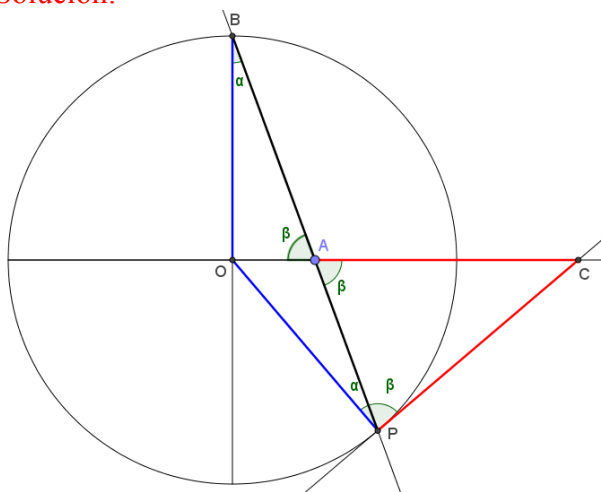
$N = 6$	1	0	-21	-90
	6	36	90	
	1	6	15	0

Con el cociente $N^2 + 6N + 15$ no se obtiene ninguna raíz real más.

Por tanto $N = 6$.

7. Sobre un diámetro de una circunferencia dada, se toma un punto arbitrario A. El punto B es uno de los extremos del diámetro perpendicular al que contiene al punto A. La recta BA corta a la circunferencia en P. La recta tangente a la circunferencia en el punto P, corta en C a la prolongación del diámetro que contiene a A. Demostrar que $CA = CP$.

Solución:



El triángulo BOP es isósceles pues dos de sus lados son radios ($OB = OP$):

$$\alpha = \angle OBP = \angle OPB$$

El triángulo BOA es rectángulo y por tanto el ángulo en A es el complementario del de B:

$$\beta = \angle OAB = 90^\circ - \alpha$$

Los ángulos $\angle OAB$ y $\angle CAP$ son iguales pues son opuestos por el vértice:

$$\angle CAP = \angle OAB = \beta$$

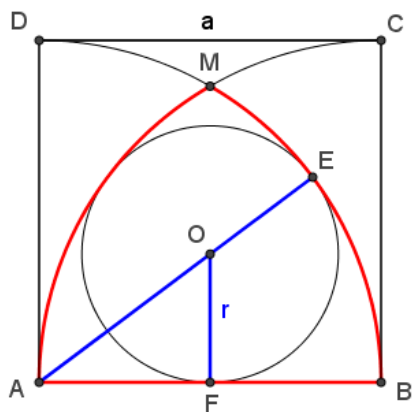
El ángulo $\angle CPA$ es el complementario de $\angle OPA$ dado que la recta tangente en P es perpendicular al radio OP.

$$\angle CPA = 90^\circ - \alpha = \beta$$

Así, $\angle CPA = \angle CAP$, luego el triángulo ACP es isósceles y, por tanto, $CA = CP$.

8. En el cuadrado de vértices A, B, C y D, de lado a, se trazan los arcos BD y AC con centro en A y en B respectivamente, y radio a. Los dos arcos se cortan en M. Hallar el radio del círculo inscrito en el triángulo curvilíneo AMB.

Solución:



En el triángulo rectángulo AFO, los catetos son $a/2$ (mitad del lado del cuadrado) y r (radio), mientras que la hipotenusa es $a - r$ (radio del arco BD menos el radio OE).

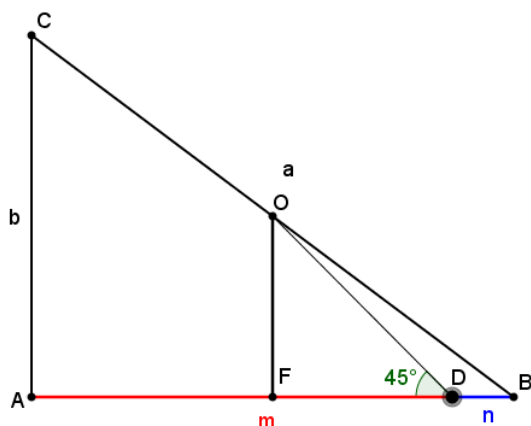
Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 = (a - r)^2 \rightarrow a^2 + 4r^2 = 4a^2 - 8ar + 4r^2$$

$$\rightarrow 8ar = 3a^2 \rightarrow 8r = 3a \rightarrow r = \frac{3a}{8}$$

9. Por el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo se traza una recta que corta al cateto mayor con un ángulo de 45° , determinando así dos segmentos en el cateto. Calcular, en función de la hipotenusa, la suma de los cuadrados de estos dos segmentos.

Solución:



Siendo OF perpendicular desde el punto medio de la hipotenusa al cateto mayor, se tiene que el triángulo OFD es isósceles y por tanto $DF = OF$ que es la mitad de CA ($b/2$):

$$BF = n + \frac{b}{2} = \frac{m+n}{2} = \frac{1}{2}BA$$

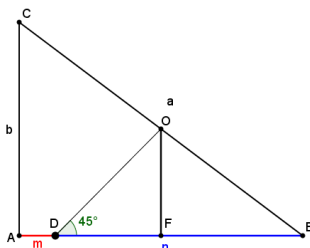
$$\rightarrow 2n + b = m + n \rightarrow b = m - n$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ABC:

$$a^2 = b^2 + (m+n)^2 = (m-n)^2 + (m+n)^2 = 2m^2 + 2n^2$$

$$\rightarrow a^2 = 2(m^2 + n^2) \rightarrow m^2 + n^2 = \frac{a^2}{2}$$

Se procede de forma análoga si la recta que forma 45° con el cateto mayor corta a éste a la izquierda del punto F en lugar de a la derecha:



10. En un grupo de 24 alumnos que han escogido al menos una de las asignaturas de Ciencias, Geografía y Matemáticas, 5 alumnos escogen, al menos, Ciencias y Geografía, 3 Ciencias y Matemáticas y, 6 Geografía y Matemáticas. El número de los que escogen sólo una de esas asignaturas es el mismo para las tres. ¿Qué número de alumnos ha escogido cada una de esas tres asignaturas?

Solución:

Denotemos por x al número de alumnos que escogen solo una de las tres asignaturas y que es el mismo para las tres.

Llamamos y al número de alumnos que eligen las tres asignaturas.

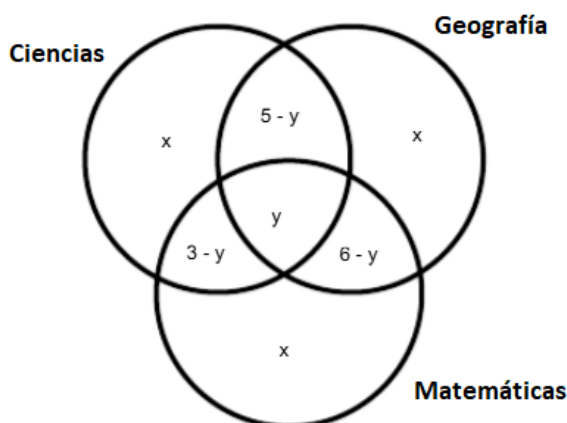
Con la información del diagrama sabemos que:

$$3x + ((5-y) + (3-y) + (6-y)) + y = 24$$

$$3x - 2y + 14 = 24$$

$$3x - 2y = 10$$

Teniendo en cuenta que x e y son números enteros y que $y \leq 3$:



x	4	6
y	1	4 (no vale)

Han elegido Ciencias: $x + ((5-y) + (3-y)) + y = x - y + 8 = 4 - 1 + 8 = 11$

Han elegido Geografía: $x + ((5-y) + (6-y)) + y = x - y + 11 = 4 - 1 + 11 = 14$

Han elegido Matemáticas: $x + ((6-y) + (3-y)) + y = x - y + 9 = 4 - 1 + 9 = 12$

