Seminario de problemas. Curso 2024-25. Hoja 1

1. ¿Cuál es la suma de todos los números de dos cifras $[ab]$ que cumplen la igualdad $\frac{[ab]}{[ba]}=\frac{4}{7}$? ($[ab]$ representa un número de dos cifras, no un producto)

Solución:

$\frac{10a+b}{10b+a}=\frac{4}{7} \Rightarrow 7(10a+b)=4(10b+a) \Rightarrow 70a+7b=40b+4a \Rightarrow 66a=33b \Rightarrow 2a=b$

Las únicas posibilidades son $\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$, $\begin{cases}a=2\\b=4\end{cases}$, $\begin{cases}a=3\\b=6\end{cases}$ y $\begin{cases}a=4\\b=8\end{cases}$

Los números de dos cifras son 12, 24, 36 y 48, que suman 120

2. Los números de cuatro cifras cuyos dígitos suman 9 se colocan en una lista en orden creciente. ¿Qué lugar ocupa el número 2025?

Solución:

Comenzando con 1:

1800 (3) – 1710 (6) – 1620 (6) – 1611 (3) – 1530 (6) – 1521 (6)
– 1440 (3) – 1431 (6) – 1422 (3) – 1332 (3) . Total 45 casos.

El valor entre paréntesis indica el número de combinaciones posibles.

Por ejemplo: 1800 (3) se refiere a 1800, 1080 y 1008
1710 (6) contiene los casos 1710, 1701, 1170, 1071, 1107 y 1017.

Comenzando con 2, no superando a 2025:

2007 – 2016 – 2025. Total 3 casos.

El lugar que ocupa 2025 es 45+3 = 48.

3. ¿Cuáles son las dos últimas cifras de 51^{51}?

Solución:

$51^{51}=(51^2)^{25}\cdot 51=2601^{25}\cdot 51$

Trabajando solo con las dos últimas cifras (congruencias módulo 100): $2601 \cong 1$ (mód. 100)

Así, $2601^{25}\cdot 51 \cong 1^{25}\cdot 51 = 51$ (mód. 100)

Por tanto, 51^{51} acaba en 51.

4. Si x es un número real positivo tal que $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=7$, ¿cuánto vale $x^3+\frac{1}{x^3}$?

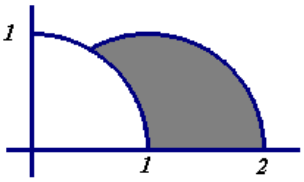
Solución:

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x^2\frac{1}{x}+3x\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

Como $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=7$, entonces $x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}$.

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=\sqrt{7}^3-3\sqrt{7}=7\sqrt{7}-3\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

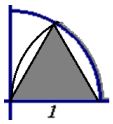
5. La figura muestra dos trozos de círculos, cada uno de radio 1 y los dos con centro en el eje de abscisas (puntos (0,0) y (1,0)). ¿Cuál es el área de la región sombreada?



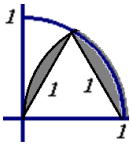
Solución:

El área sombreada se obtiene con el área de medio círculo de radio 1 (A_1) menos un triángulo equilátero de lado 1 (A_2) y dos segmentos circulares de cuerda igual al radio (A_3).

Medio círculo: $A_1 = \dfrac{\pi \cdot 1^2}{2} = \dfrac{\pi}{2}$



Triángulo equilátero: $A_2 = \dfrac{1 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

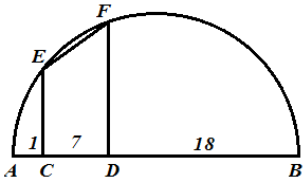


Segmento circular: $A_3 = \dfrac{\pi \cdot 1^2}{6} - \dfrac{1 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

El área sombreada es: $A_1 - A_2 - 2A_3 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{4} - 2\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

6. Sea AB un segmento de longitud 26 y C y D dos puntos en él tales que AC = 1 y AD = 8. Sean E y F dos puntos en una de las semicircunferencias de diámetro AB tales que EC y FD son perpendiculares a AB. Calcula EF.

Solución:

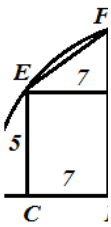


Aplicando el teorema de la altura en el triángulo ABE:

$$CE^2 = AC \cdot CB = 1 \cdot 25 = 25 \Rightarrow CE = 5$$

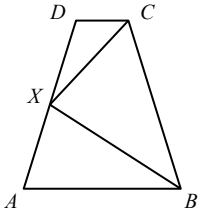
Análogamente sobre el triángulo ABF:

$$DF^2 = AD \cdot DB = 8 \cdot 18 = 144 \Rightarrow DF = 12$$

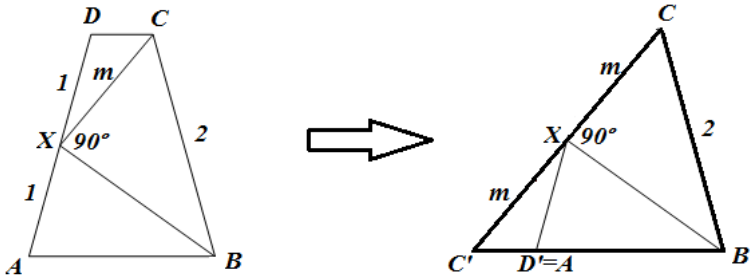


Así, en el triángulo EFG: $EF^2 = 7^2 + 7^2 = 98 \Rightarrow EF = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

7. ABCD es un trapecio isósceles y X es el punto medio del lado AD. Si AX = 1 y el triángulo XBC es rectángulo en X, ¿cuál es el perímetro del trapecio?



Solución:



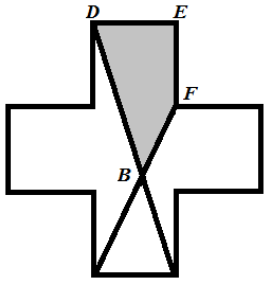
Al girar 180º el triángulo XCD sobre X se obtiene el triángulo $XC'D'$.

Esto nos da el nuevo triángulo $CC'B$ que es isósceles, con lo que:

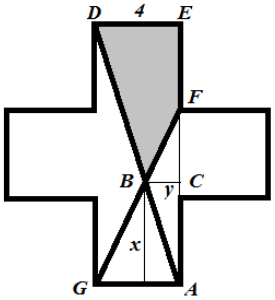
$$CB = 2 = C'B = C'D' + AB = CD + AB$$

Por tanto, el perímetro es $(AB + CD) + BC + AD = 2 + 2 + 2 = 6$

8. Los doce lados del polígono de la figura son de igual longitud, 4, y cualesquiera dos consecutivos se cortan en ángulo recto. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *DEFB*?



Solución:



Considerando que los triángulos *ABC* y *ADE* son semejantes:

$$\frac{BC}{AC}=\frac{DE}{AE} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \Rightarrow 3y=x$$

También son semejantes *FBC* y *FGA*:

$$\frac{BC}{FC}=\frac{GA}{FA} \Rightarrow \frac{y}{8-x}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2y=8-x$$

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 3y=x \\ 2y=8-x \end{cases} \Rightarrow 2y=8-3y \Rightarrow 5y=8 \Rightarrow y=\frac{8}{5} \Rightarrow x=3y=\frac{24}{5}$$

El área solicitada es la del triángulo *ADE* menos la del *ABF*:

$$ADE-ABF=\frac{12\cdot 4}{2}-\frac{8\cdot \cancel{8}}{\cancel{2}\ 5}=24-\frac{32}{5}=\frac{88}{5}$$

9. En una caja hay 2 tarjetas numeradas distintas del 1 al 2024. Antonio y Beatriz sacan cada uno una tarjeta de la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la tarjeta de Antonio sea el doble o más que el número de la tarjeta de Beatriz?

Solución:

Casos posibles: $2024 \cdot 2023$.

Casos favorables:

Si Beatriz saca la tarjeta 1, Antonio puede tener desde la tarjeta 2 hasta la 2024: 2023 casos.

Si Beatriz saca la tarjeta 2, Antonio puede tener desde la tarjeta 4 hasta la 2024: 2021 casos.

…

Si Beatriz sacó la tarjeta 1012, Antonio puede tener solo la tarjeta 2024: 1 caso.

Si Beatriz sacó una tarjeta superior a la 1012, Antonio no tiene casos favorables.

Así: $p=\dfrac{2023+2021+\ldots+1}{2024\cdot 2023}=\dfrac{\frac{(2023+1)\cdot 1012}{2}}{2024\cdot 2023}=\dfrac{2024\cdot 1012}{2024\cdot 2023\cdot 2}=\dfrac{1012}{2023\cdot 2}=\dfrac{506}{2023}$

10. En el conjunto de enteros positivos definimos una función f tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para cualesquiera x e y. Si $f(10) = 14$ y $f(40) = 20$, ¿cuál es el valor de $f(500)$?

Solución:

$20=f(40)=f(10\cdot 4)=f(10)+f(4)=14+f(4) \Rightarrow f(4)=6$

$6=f(4)=f(2\cdot 2)=2f(2) \Rightarrow f(2)=3$

$14=f(10)=f(2\cdot 5)=f(2)+f(5)=3+f(5) \Rightarrow f(5)=11$

$f(100)=f(10\cdot 10)=2f(10)=2\cdot 14=28$

Finalmente: $f(500)=f(100\cdot 5)=f(100)+f(5)=28+11=39$

11. Una chica tarda 15 segundos en bajar una de las escaleras mecánicas del Metro. Al día siguiente, la escalera está estropeada y tarda 20 segundos, bajando a igual velocidad que el día anterior. ¿Cuántos segundos tardaría en bajar si se quedara parada en la escalera cuando ésta baja?

Solución:

Llamemos v_{esc} a la velocidad de bajada de la escalera y v_{baj} a la velocidad de bajada de la chica.

Recordamos que la velocidad por el tiempo nos da el espacio recorrido.

Al tardar 15 segundos en bajar un día y 20 al día siguiente, siendo el espacio recorrido el mismo:

Espacio recorrido: $(v_{esc} + v_{baj}) \cdot 15 = v_{baj} \cdot 20 \Rightarrow 15 \cdot v_{esc} = 5 \cdot v_{baj} \Rightarrow 3 \cdot v_{esc} = v_{baj}$

El tiempo solicitado, t, en segundos, será:

$v_{esc} \cdot t = v_{baj} \cdot 20 \Rightarrow v_{esc} \cdot t = (3 \cdot v_{esc}) \cdot 20 \Rightarrow t = 3 \cdot 20 = 60$ segundos