Seminario de problemas. Curso 2023-24. Hoja 1

1. ¿Cuántos números enteros estrictamente positivos y menores que 2023, son producto de dos números pares?

Solución:

$2a \cdot 2b = 4ab < 2023 \Rightarrow ab < \dfrac{2023}{4} = 505{,}75 \Rightarrow 505$ números

2. Siendo $x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x$, ¿cuál es el valor de la suma $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\dfrac{4}{5!}+\ldots$?

Solución:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\ldots=\frac{1}{2!}+\frac{3}{3!}-\frac{1}{3!}+\frac{4}{4!}-\frac{1}{4!}+\frac{5}{5!}-\frac{5}{5!}+\ldots=\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\cancel{\frac{1}{3!}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4!}}+\cancel{\frac{1}{4!}}-\cancel{\frac{5}{5!}}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

3. Calcula la suma de las cifras de $2^{2020}\cdot 5^{2023}$. ¿Cuántas cifras tiene?

Solución:

$2^{2020}\cdot 5^{2023} = 5^3\cdot 10^{2020} = 125\cdot 10^{2020}$. Este número está formado por 125 seguido de 2020 ceros.
Tiene 2023 cifras y suman 8 (1+2+5)

4. ¿Qué número es $\sqrt{10-4\sqrt{6}}-\sqrt{10+4\sqrt{6}}$?

Solución:

Si $a=\sqrt{10-4\sqrt{6}}-\sqrt{10+4\sqrt{6}}$:

$$a^2=\left(10-4\sqrt{6}\right)+\left(10+4\sqrt{6}\right)-2\sqrt{10-4\sqrt{6}}\sqrt{10+4\sqrt{6}}=20-2\sqrt{10^2-4^2\cdot 6}=20-2\cdot 2=16$$

$\Rightarrow a=\sqrt{16}=\pm 4$

Como $\sqrt{10-4\sqrt{6}}<\sqrt{10+4\sqrt{6}} \Rightarrow a=-4$

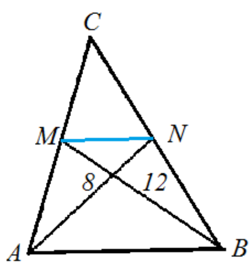
5. Las soluciones de la ecuación $x^3-2x^2+4x-1=0$ son a, b y c. Calcular el valor de $a^4+b^4+c^4$.

Solución:

Para cada solución de la ecuación, por ejemplo, a: $a^3-2a^2+4a-1=0 \Rightarrow a^3=2a^2-4a+1$
Así, $a^4=a\cdot a^3=a\cdot(2a^2-4a+1)=2a^3-4a^2+a=2\cdot(2a^2-4a+1)-4a^2+a=$
$=4a^2-8a+2-4a^2+a=-7a+2$
Análogamente: $b^4=-7b+2$ y $c^4=-7c+2$
Por tanto: $a^4+b^4+c^4=(-7a+2)+(-7b+2)+(-7c+2)=-7(a+b+c)+6$
Por las reglas de Cardano, la suma de las tres raíces de x^3-2x^2+4x-1 es $-(-2)=2$
Luego, $a^4+b^4+c^4=-7\cdot 2+6=-8$

6. Si dos de las medianas de un triángulo son perpendiculares y miden 8 y 12 cm, calcular el área del triángulo, en cm^2.

Solución:



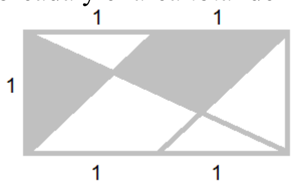
Siendo el triángulo ABC de medianas $AN = 8$ cm y $BM = 12$ cm con $AN \perp BM$,

el área del cuadrilátero (trapecio) $ABNM$ es $\dfrac{8\cdot 12}{2}=48\,\text{cm}^2$.

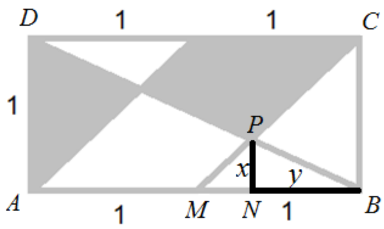
El área de MNC es la cuarta parte del triángulo original ABC puesto que sus lados son la mitad. Luego MNC es la tercera parte de $ABNM$: $\dfrac{48}{3}=16$ cm^2.

Así, el área de ABC es $48 + 16 = 64$ cm^2.

7. ¿Cuál es el cociente entre el área sombreada y el área total del rectángulo?



Solución:



Por ser los triángulos *PNB* y *DAB* semejantes: $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ => $2x = y$

Por ser los triángulos *PNM* y *CBM* semejantes: $\frac{x}{1-y} = \frac{1}{1}$ => $x = 1 - y$

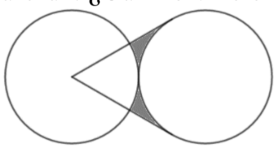
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = 1 - y \end{cases} \Rightarrow x = 1 - 2x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Y, por tanto, el área de *MBP* es: $\frac{1 \cdot 1/3}{2} = \frac{1}{6}$.

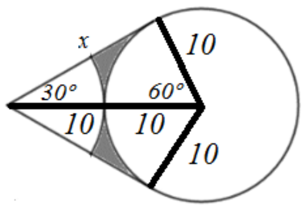
El área sombreada es medio rectángulo menos el área del triángulo *MBP*: $\frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

El cociente solicitado es: $\frac{5/6}{2 \cdot 1} = \frac{5}{12}$

8. Dos círculos iguales, de radio 10, son tangentes exteriores. Las tangentes al círculo de la derecha se cortan en el centro del círculo de la izquierda. ¿Cuánto vale el área de la zona sombreada?



Solución:



Se forman dos triángulos rectángulos teniendo por catetos la tangente y el radio de la circunferencia de la derecha (10) y, por hipotenusa, la distancia entre los centros (20). Ambos son como un cartabón, siendo los ángulos de 30º, 60º y 90º.

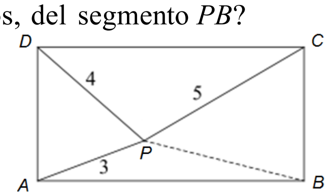
Además:

$$x^2 = 20^2 - 10^2 = 400 - 100 = 300 \Rightarrow x = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

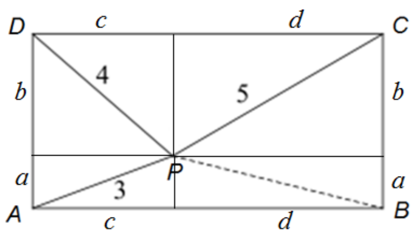
El área sombreada es la de los dos triángulos rectángulos iguales formados menos dos sectores circulares de 60º (a la izquierda) y 120º (a la derecha).

Su valor es: $2 \cdot \frac{10 \cdot 10\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\pi 10^2 - \frac{1}{3}\pi 10^2 = 100\sqrt{3} - 50\pi$

9. *P* es un punto interior del rectángulo *ABCD* tal que *PA* = 3 cm, *PD* = 4 cm y *PC* = 5 cm. ¿Cuál es la longitud, en centímetros, del segmento *PB*?



Solución:



Aplicando el Teorema de Pitágoras a los triángulos que tienen por diagonales *PA, PD* y *PC*:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 3^2 = 9 \\ b^2 + c^2 = 4^2 = 16 \\ b^2 + d^2 = 5^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 - c^2 \\ b^2 + c^2 = 16 \\ d^2 = 25 - b^2 \end{cases}$$

$PB^2 = a^2 + d^2 = (9 - c^2) + (25 - b^2) = 34 - (b^2 + c^2) = 34 - 16 = 18$.

Por tanto: $PB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ cm.

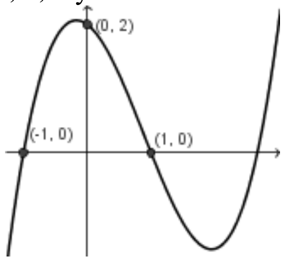
10. Si $3^a = 4$, $4^b = 5$, $5^c = 6$, $6^d = 7$, $7^e = 8$ y $8^f = 9$, ¿cuánto vale el producto *abcdef?*

Solución:

$3^{abcdef} = (((((3^a)^b)^c)^d)^e)^f = ((((4^b)^c)^d)^e)^f = (((5^c)^d)^e)^f = ((6^d)^e)^f = (7^e)^f = 8^f = 9$

$3^{abcdef} = 9 \Rightarrow abcdef = 2$

11. Aquí se muestra un trozo de la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
¿Qué se puede decir de los valores de *a, b, c* y *d*?



Solución:

$f(0) = 2 \Rightarrow d = 2$

$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 0$

$f(-1) = 0 \Rightarrow -a + b - c + d = 0$

Sumando: $2b + 2d = 0 \Rightarrow b = -d = -2$

Restando: $2a + 2c = 0 \Rightarrow a = -c$

Siendo las tres raíces del polinomio $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ y $x_3 > 1$, por las reglas de Cardano:

$$\frac{d}{a} = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \Rightarrow x_3 = \frac{2}{a}$$

$$\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 \Rightarrow \frac{c}{a} = -1 \text{ (información redundante)}$$

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow \frac{2}{a} = x_3 \text{ (información redundante)}$$

$a > 0$ por la forma de la función cúbica y $x_3 = \frac{2}{a} > 1 \Rightarrow 0 < a < 2$.

Resumiendo: $0 < a < 2$, $b = -2$, $-2 < c < 0$ y $d = 2$

12. En una liguilla de fútbol con cuatro equipos a doble partido (3 puntos por partido ganado, 1 punto por empate y 0 puntos por la derrota), conocemos las puntuaciones 16, 8 y 2 de tres de ellos. Si sabemos que en total hubo 5 partidos que terminaron con empate, ¿cuántos puntos obtuvo el cuarto equipo?

Solución:

Entre cuatro equipos a doble partido hay un total de 12 partidos.
Como 5 de ellos acaban en empate, los otros siete serán victorias de uno de los dos equipos enfrentados.
El número total de puntos repartidos es: 7·3 + 5·(1+1) = 31 puntos.
Si tres de los equipos han obtenido 16, 8 y 2 (26 puntos), al cuarto equipo le corresponden:

31 – 26 = 5 puntos